

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

На правах рукопису

ОСТРОВСЬКИЙ Віталій Валентинович

УДК 532.5

СТІЙКІСТЬ КОНФІГУРАЦІЙ ТОЧКОВИХ ВИХОРИВ НА СФЕРІ

01.02.05 — механіка рідини, газу та плазми

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата
фізико-математичних наук

Науковий керівник
Мелешко В'ячеслав Володимирович,
доктор фізико-математичних наук, професор

Київ — 2010

ЗМІСТ

Вступ	4
1. Огляд літературних джерел	10
1.1. Сучасний стан задачі про стійкість положень рівноваги точкових вихорів	10
1.2. Методи дослідження стійкості гамільтонових систем	18
Висновки до розділу 1	20
2. Рівняння руху точкових вихорів на сфері	21
2.1. Рівняння завихреності поля швидкостей ідеальної нестисливої рідини у тонкому шарі	21
2.2. Рівняння руху точкових вихорів	26
2.3. Гамільтоніан та перші інтеграли руху.	30
Висновки до розділу 2	32
3. Положення рівноваги точкових вихорів на сфері	34
3.1. Фіксовані положення рівноваги трьох вихорів	34
3.2. Фіксовані положення рівноваги чотирьох вихорів	38
3.3. Положення відносної рівноваги трьох вихорів	42
3.4. Положення відносної рівноваги чотирьох вихорів	47
3.5. Положення рівноваги N вихорів.	49
Висновки до розділу 3	60
4. Стійкість точкових вихорів на сфері	61
4.1. Метод енергії-моменту	62
4.1.1. Метод енергії-моменту у векторній формі	68
4.1.2. Метод енергії-моменту в циліндричних координатах	73

4.2. Стійкість трьох точкових вихорів	78
4.3. Стійкість симетричних конфігурацій	91
4.3.1. Стійкість тетраедра	91
4.3.2. Стійкість правильної трикутної піраміди	96
4.3.3. Стійкість правильних багатогранників	101
Висновки до розділу 4	105
Висновки	108
Додатки	110

ВСТУП

Точкові вихорі на сфері – це модель, яка дозволяє якісно вивчити поведінку центрів завихреності поля швидкостей на поверхні сфери. Дана модель та її похідні досить широко використовуються в геофізиці, метеорології, чисельних методах.

Ключовими характеристиками руху довільної динамічної системи є її положення рівноваги, а саме стійкі положення рівноваги, або в більш загальному випадку стійкі багатовиди. Сучасний розвиток диференціальної геометрії та теорії груп дозволяє провести дослідження стійкості положень рівноваги довільної динамічної системи з урахуванням присутніх симетрій та геометрії поверхні руху.

У даній дисертаційній роботі методами аналітичної та геометричної механіки досліджено стійкість положень рівноваги точкових вихорів на поверхні сфери. Результати проведеного дослідження є наступним кроком у задачі дослідження динаміки руху вихорів на сфері.

Актуальність теми. Динаміка руху точкових вихорів є активною областю дослідження науковців уже понад сто років. Починаючи від моделі атома лорда Кельвіна, модель точкових вихорів знаходить застосування в різних галузях фізики. Конфігурації точкових вихорів для надпровідників другого типу були вперше передбачені Абрикосовим [3], перші знімки яких можна знайти у роботі [16]. Сучасні дослідження конденсату Бозе-Ейнштейна [1, 46, 4], свідчать про те, що модель точкових вихорів в ідеальній рідині адекватно описує процеси, які спостерігаються в конденсаті Бозе-Ейнштейна. Також двовимірні конфігурації точкових вихорів можна спостерігати у плазмі [15] та надрідкому гелії [47].

Моделі точкових вихорів також досить широко використовуються в сучасній геофізиці. Дослідження руху вихрової пари на β -площині [48] та стійкість вихрових структур на рухомій сфері [13] одні із багатьох питань які знаходяться в стадії активного дослідження.

Перші роботи по дослідженню стійкості конфігурацій точкових вихорів на сфері з'явилися на протязі останніх 10 років [40, 29, 32] і продовжують періодично з'являтися на сторінках провідних наукових видань. Тому задача про стійкість конфігурацій точкових вихорів на поверхні сфери є актуальною задачею, дослідженню якої присвячена ця дисертаційна робота.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконана у рамках аспірантського плану по кафедрі теоретичної та прикладної механіки, затвердженого рішенням вченої ради механіко-математичного факультету, та бюджетної науково-дослідної теми «Мікромеханіка тонких плівок на комбінованій шаруватій пружній основі – експериментальні методи індентування надтонких плівок та теоретичні розрахунки» (№ держреєстрації 0106U005865, 2006-2010 рр).

Мета і завдання дослідження. Метою роботи є теоретичне вивчення стійкості симетричних конфігурацій точкових вихорів на поверхні сфери та знаходження залежності знайдених областей стійкості від значень інтенсивності точкових вихорів.

Досягнення мети передбачає:

- вивід рівнянь руху точкових вихорів у шарі ідеальної нестисливої рідини на поверхні сфери;
- знаходження положень рівноваги;
- формулювання і розробка методики дослідження стійкості гамільтонових систем з симетрією;
- застосування розробленої методики до задачі про рух точкових вихо-

рів;

- аналіз областей стійкості в залежності від параметрів системи.

Об'єктом дослідження є тонкий шар ідеальної нестисливої рідини сферичної форми.

Предметом дослідження є стійкість рівноважних конфігурацій точкових вихорів, які існують в такому сферичному шарі ідеальної нестисливої рідини.

Методи дослідження. Для досягнення сформульованої мети у роботі розвинено і використано методи математичної фізики та диференціальної геометрії. Вивід рівнянь руху здійснюється на основі методу функції Гріна для оператора Бельтрамі-Лапласа. Для знаходження положень рівноваги використовуються методи лінійної алгебри та векторного числення. Задача про стійкість знайдених положень рівноваги аналізується за допомогою методів дослідження гамільтонових систем з компактними неперервними та дискретними симетріями.

Наукова новизна отриманих результатів. Основними новими науковими результатами, що виносяться на захист, є такі:

- класифіковано положення рівноваги чотирьох точкових вихорів;
- знайдено нові положення рівноваги у формі кубооктаедра та ікосідодекаедра;
- проведено повне дослідження стійкості положень рівноваги у формі кубооктаедра та ікосідодекаедра. Показано, що дані положення рівноваги є нестійкими;
- отримано умови стійкості положення рівноваги у формі тетраедра;
- розвинено методу дослідження стійкості гамільтонових систем з компактними неперервними симетріями.

Вірогідність. Вірогідність отриманих результатів та висновків забезпечується строгістю (в рамках моделі точкового вихору в ідеальній нести-

сливій рідині) і коректністю математичного формулювання задачі; використанням апробованих аналітичних і чисельних методів; узгодженням окремих результатів з відомими розв'язками задач та з результатами приведеними в багатьох наукових виданнях.

Практичне значення отриманих результатів. Отримані результати є безперечним внеском у задачу дослідження руху точкових вихорів на поверхні сфери. Вони можуть бути використані при розробці загальних теорій дослідження нелінійних динамічних систем та при побудові моделей, які описують рух областей завихреності планетарного масштабу. Матеріали дисертаційної роботи включено до спеціального курсу “Динаміка концентрованих вихорів”, який викладається на механіко-математичному факультеті Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

Апробація результатів дисертації. Основні результати дослідження доповідалися на міжнародних наукових конференціях:

- IUTAM Symposium “150 Years of Vortex Dynamics”, м. Копенгаген, Данія, жовтень 2008 р.;
- “Моделювання та дослідження стійкості динамічних систем”, м. Київ, травень 2009 р.;
- “Регулярная и хаотическая гидродинамика”, м. Іжевськ, Росія, травень 2010 р.

Результати дослідження доповідались на науковому семінарі “Сучасні проблеми механіки” (керівники акад. НАН України В. Т. Грінченко, чл.-кор. НАН України А. Ф. Улітко, проф. В. В. Мелешко) Київського національного університету імені Тараса Шевченка (травень 2008 р., вересень 2009 р.).

Дисертаційна робота доповідалась в повному обсязі та отримала позитивну оцінку на:

- семінарі кафедри теоретичної та прикладної механіки механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка (м.Київ, вересень 2009 р.);
- Республіканському семінарі з гідромеханіки Інституту гідромеханіки НАН України під керівництвом акад. НАН України В. Т. Грінченка (м. Київ, червень 2010 р.);
- семінарі “Чисельне моделювання методами дискретних особливостей в математичній фізиці” Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна під керівництвом проф. Ю. В. Ганделя (м. Харків, липень 2010 р.);
- семінарі “Фундаментальні та прикладні питання механіки суцільних середовищ” кафедри теоретичної механіки Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна під керівництвом проф. М. Ф. Пацегона (м. Харків, липень 2010 р.).

Публікації та особистий внесок здобувача. Основні результати дисертації опубліковано у 4 наукових статтях у виданнях, затверджених ВАК України фаховими виданнями.

Основні результати роботи отримані дисертантом самостійно. В опублікованих наукових роботах авторові належить участь у постановці задачі, виведенні рівнянь руху, знаходженні положень рівноваги, розробці способів дослідження стійкості, аналізі отриманих результатів. Зокрема у роботах [74, 72] дисертант провів вивід рівнянь руху, реалізував аналітичні перетворення. В роботі [73] дисертант знайшов нові положення рівноваги та дослідив стійкість знайдених положень рівноваги.

В роботах [74, 72, 73] науковому керівнику В. В. Мелешку належить постановка розглянутих завдань, ідеї проведення аналітичних перетворень та обговорення результатів. Співавтор П. К. Ньютон в роботах [72, 73] провів аналіз можливих траєкторій руху, запропонував метод знаходження поло-

жень рівноваги та приймав участь в обговоренні результатів.

Структура роботи. Дисертаційна робота складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків та списку літератури з 81 джерела. Робота містить 13 рисунків і 3 таблиці; повний обсяг становить 119 сторінок, з яких 109 сторінок основного тексту.

РОЗДІЛ 1

ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРНИХ ДЖЕРЕЛ

В розділі наведено огляд стану наукової задачі, яка є предметом дослідження, і розглянуто основні методи знаходження положень рівноваги та дослідження стійкості гамільтонових систем з симетріями. Проведено порівняння наведених методів.

1.1. Сучасний стан задачі про стійкість положень рівноваги точкових вихорів

Сучасна вихрова теорія бере свій початок з визначної статті Гельмгольца "Про інтеграли рівнянь гідродинаміки, які відповідають вихровим рухам"[20]. В цій роботі вчений означив вихровий рух, як рух ідеальної нестисливої рідини за відсутності однозначного потенціалу швидкості. Також автор ввів такі класичні поняття гідродинаміки як вихрова лінія і вихрова нитка. Далі, користуючись результатами Коші та Стокса, Гельмгольц вивів три закони збереження вихрового руху¹:

1. Частинки рідини, які не обертались в певний момент часу, не будуть обертатись і через деякий час.
2. Всяка вихрова лінія залишається постійно складеною з одних і тих же частинок рідини і пересувається в рідині разом з ними.
3. Добуток швидкості руху на поперечний перетин є величина постійна на всій довжині однієї і тієї ж вихрової нитки.

З останнього закону випливає, що вихрові нитки не можуть починатись або закінчуватись в середині рідини, вони або є замкненими лініями, або є

¹Приведені закони є вільним перекладом тверджень оригінальної статті Гельмгольца.

лініями які сполучають дві точки на границі рідини. В своїй роботі Гельмгольц привів приклад прямолінійних та кільцеподібних вихорів. У випадку кільцевих рухів, він привів приклад двох частинних рухів: перший, коли вихрові нитки рухаються назустріч одна одній і радіуси їх кілець зростають; другий - вихорі рухаються в одну сторону причому одне із кілець сповільнюється і розширяється поки через нього проходить друге кільце і цей процес циклічно повторюється. Гельмгольц також описав рух паралельних прямолінійних вихрових ниток, які являють собою точкові вихорі на площині.

Після Гельмгольца теорію точкових вихорів на площині розвинув Кірхгоф у своїх лекціях по математичній фізиці [64]. Він вперше вивів рівняння руху N точкових вихорів на площині. Знайшов перші інтеграли та вказав гамільтонову структуру системи. Кірхгоф також більш детально, в порівнянні з Гельмгольцем, дослідив рух вихрової пари (два вихорі рівної за абсолютним значенням, але протилежної за знаком інтенсивності). Також, в пізніших виданнях лекцій, автор розглянув рух у випадку трьох точкових вихорі на площині.

Кірхгоф розглянув особливий випадок, коли паралельні вихрові нитки повністю заповнюють внутрішність еліптичного циліндра. Він показав, що еліпс залишається еліпсом з часом, але відбуваються деформації його осей. Дана модель еліптичного вихору називається вихором Кіргофа і використовується при вивченні руху п'ятен завихреності.

Вольтер Грьоблі у своїй дисертації [17] детально дослідив задачу про рух трьох точкових вихорів на площині. Він вказав, що дана задача допускає три незалежних інволютивних інтеграли руху, а тому допускає запис розв'язку в квадратурах. У своїй роботі Грьоблі зосереджується на випадку рівних інтенсивностей, а також вивчає взаємодію з вихором одиничної інтенсивності. Також, в даній дисертації, автор дослідив частинний випадок руху чотирьох вихорів (у випадку осьової симетрії) та більш загальний

випадок руху $2N$ вихорів за наявності N осей симетрії.

Подальші дослідження інтегровного випадку руху трьох точкових вихорів на площині провів Синг [43]. У своїй роботі він привів без доведення 5 теорем²:

1. Якщо в заданій конфігурації інтенсивності всіх вихорів раптово змінять знак, то система пройде через всі конфігурації в яких вона була раніше.
2. Якщо в момент часу t_0 маємо колінеарну конфігурацію, то конфігурації в моменти часу $t_0 \pm \tau$ є дзеркальними відображеннями одна одної для довільного значення τ .
3. Система не може пройти більше ніж через дві різні колінеарні конфігурації; час необхідний для проходження від однієї колінеарної конфігурації до іншої однаковий.
4. Нехай існує дві системи вихорів S_1 та S_2 , кожна складається з однакового числа вихорів, і інтенсивності вихорів в конфігурації S_1 рівні інтенсивностям конфігурації S_2 помноженим на число K ; допустимо також, що в початковий момент конфігурації є подібними, без дзеркальних відображень, і довжини сторін в S_1 рівні довжинам в S_2 помноженим на число L . Тоді наступні конфігурації системи S_2 через час t_2 подібні, без дзеркальних відображень, до конфігурацій системи S_1 через час t_1 , де $t_2 = t_1(L^2/K^2)$.
5. Якщо інтенсивності всіх вихорів мають однаковий знак, їх взаємні відстані обмежені зверху і знизу увесь час (позитивний та негативний).

Синг сформулював та довів критерії яким повинні задовольняти фіксовані положення рівноваги. Також він ввів трилінійні координати для зображення фазового портрету і дослідив можливі рухи трьох точкових вихорів на

²Приведені теореми є вільним перекладом оригінальної роботи Синга.

фазовій площині.

Роботи Грьоблі та Синга були частково забуті і в книзі Бетчелора [60] задача про рух трьох точкових формулюється як не розв'язана. Це послужило причиною для повторного дослідження проблеми. У роботах Новікова [76] та Арефа [5] заново приводиться опис руху трьох точкових вихорів на площині.

Слід відмітити, що на початку ХХ-го сторіччя лорд Кельвін привернув увагу до задачі про рівновагу точкових вихорів на площині запропонувавши модель вихрових атомів. Він постановив задачу про рівновагу точкових вихорів однакової інтенсивності розташованих у вершинах правильних багатокутників (кілець вихорів) та провів аналогію з проблемою рівноваги плаваючих магнітів [45]. Як показав лорд Кельвін точкові вихорі, а також магніти, які зображають вихори в модельному експерименті, будуть обертатися навколо центра симетрії даної системи. Розв'язок Дж. Дж. Томсона задачі про рівновагу кілець вихорів був удостоєний премії Адамса 1883-го року [44]. У даній роботі автор довів, що при $N \leq 6$ конфігурація вихорів розташованих у вершинах правильного N -кутника буде лінійно стійкою. Хоч Томсон і допустив арифметичну помилку при дослідженні випадку $N = 7$ отримавши нестійкість конфігурації, але завдяки цьому він зробив правильне припущення про нестійкість конфігурацій при $N \geq 8$. Т. Х. Хавелок [19] довів припущення Томсона і показав, що випадок $N = 7$ є особливим і не може бути досліджений методами лінійних наближень. Повний розв'язок задачі про стійкість кілець вихорів було приведено у роботі Л. Г. Куракіна та В. І. Юдовича [29] в 2002 році. Дослідження стійкості двох вкладених кілець вихорів приведено у роботі [32]. Детальний аналіз руху симетричних конфігурацій точкових вихорів на площині проведено в роботі Х. Арефа [6].

Питаннями руху точкових вихорів на сфері вперше зацікавився І. С. Громека [63]. Дану задачу вченому поставив його науковий керівник професор

В. В. Преображенський. У своїй роботі Громека дослідив поведінку нескінченно тонких вихорів в обмеженій області на нерухомій сфері. Для цього він вивів рівняння руху нескінченно тонких вихорів на площині, а потім застосовуючи картографічне перетворення координат переніс результати на поверхню сфери. Для опису динаміки на повній сфері Громека стягує границю області в точку. Автор приводить доведення того факту, що якщо в початковий момент область завихреності була круглою, то вона буде залишатись такою і надалі. Допустивши помилку (пов'язану з розподілом швидкостей вздовж лінії розділу) в кінці своєї роботи, Громека доводить хибне твердження: у випадку коли сумарна інтенсивність вихорів не рівна нулю на нерухомій сфері не може існувати вихровий рух.³

Рівняння руху точкових вихорів на поверхні цілої сфери, вперше вивів у своїй дисертаційній роботі Е. Цермело[49]. В ній автор користуючись рівняннями Лагранжа другого роду та формулою для квадрата елемента кривої на поверхні отримав рівняння руху важкої точки під дією потенціальних сил на довільній двовимірній поверхні. Потім ввівши поверхневу густину та функцію тиску Цермело вивів рівняння руху рідини на довільній поверхні. Дослідивши потік маси через криву, автор отримав рівняння нерозривності для довільної двовимірної течії. При дослідженні циркуляції швидкості, автор довів теорему Гельмгольца для рідини, яка рухається в двовимірній поверхні. Також автор означив точковий вихор на двовимірній поверхні, як "точку в рідині, яку рідина буде обтікати з нескінченною швидкістю, а сусідні до неї лінії току будуть описувати малі еліпси зі зростаючою швидкістю при наближенні до неї".⁴ Ввівши поняття потенціалу простого вихору на сфері та потенціалу n мас на сфері, Цермело отримав

³Пізніші роботи показують можливість існування вихрового руху з довільними інтенсивностями, за умови накладання постійної завихреності за межами точкових вихорів.

⁴Приведене означення є вільним перекладом означення наведеного в російському перекладі оригінальної роботи Цермело [80].

рівняння руху точкових вихорів на сфері, довів теорему про збереження центру завихреності та отримав результати про рух кругових областей завихреності. В останньому розділі своєї роботи Цермело провів дослідження руху трьох точкових вихорів на сфері.

На жаль, результати Цермело були на довгий час забуті. Тому вивід рівнянь руху точкових вихорів на сфері повторили з різним успіхом інші вчені. Зокрема, О. В. Голубєва у роботі [62] отримала рівняння руху точкових вихорів та вихреджерел на поверхні сфери.

Сучасний метод виведення рівнянь руху вперше привів у своїй роботах Богомолів[53, 54, 55]. Він користуючись функцією Гріна для оператора Бельтрамі-Лапласа описує рух точкових вихорів як у випадку нерухомої сфери, так і у випадку рухомої. Подібний, але більш лаконічний вивід рівнянь можна знайти у роботах [26, 74, 73, 72]. Рівняння руху на поверхнях постійної кривини можна знайти в роботі [25]. Рух вихорів на поверхні тіла обертання описано у роботі [18].

Незалежні дослідження інтегровної задачі про рух трьох точкових вихорів на сфері були опубліковані у 1998 році у роботах О. В. Борисова[9, 10] та П. К. Ньютона [22].⁵ У цих роботах автори вводячи трилінійні координати на фазовій площині (по аналогії з плоским випадком, розглянутим Сингом) описують можливі траєкторії руху. Як продовження роботи про рух трьох точкових вихорів в роботі[23] проводиться аналіз зіткнення даних вихорів на сфері. Застосування теореми Пуанкаре дозволило Кідамбі та Ньютону у роботі [24] класифікувати топології можливих ліній току у задачі про рух трьох точкових вихорів на сфері. Як показано у роботах [9, 10, 22] гамільтонова динамічна система, яка описує рух точкових вихорів на сфері, має три незалежних інволютивних інтеграли. Наявність двох додаткових інваріантів руху дозволяє провести редукцію системи на дві степені віль-

⁵Як було відмічено вище, вперше рух трьох точкових вихорів на сфері дослідили Е. Цермело та Е. Лаура на початку ХХ-го сторіччя [56].

ності. Дана процедура продемонстрована в роботі [57]. Як розвиток моделі точкових вихорів у роботі [58] запропоновано модель антиподальних вихорів, яка не вимагає накладання однорідного поля завихреності у випадку ненульової сумарної циркуляції.

Питання знаходження положень рівноваги точкових вихорів на сфері і дослідження їх стійкості привернуло увагу багатьох сучасних вчених. Д. Халей у роботі [18] показав, що конфігурації двох типів сформовані з кільце вихорів є положеннями рівноваги на поверхні у формі тіл обертання з дзеркальною симетрією. Конфігурація першого типу – вихорі обох кілець мають однакові за абсолютним значенням, але протилежні за знаком інтенсивності та знаходяться на однаковій відстані від площини симетрії і мають однакові кутові координати. Конфігурації другого типу – вихорі обох кілець мають однакові за абсолютним значенням, але протилежні за знаком інтенсивності та знаходяться на однаковій відстані від площини симетрії. Причому вихорі одного кільця зміщені на половину кутової відстані між двома найближчими вихорами по відношенню до другого кільця (зміщення на половину фази). У випадку сфери Халей привів області стійкості конфігурацій першого та другого типу та довів нестійкість конфігурацій першого та другого типу при $N \geq 7$ (N -кількість вихорів у кільці). Аналогічні результати незалежно від Халей отримав Ф. Лаурен-Полз у роботах [31, 30]. Лаурен-Полз також показав, що якщо до конфігурацій першого та другого типу додати вихорі розташовані в полюсах сфери, то конфігурація залишиться положенням рівноваги. Він також показав області стійкості та нестійкості таких модифікованих конфігурацій.

У незалежних роботах Г. Кабрала та ін.[11, 8] і Л. Г. Куракіна [67, 27] показано, що кільце вихорів на сфері є положенням відносної рівноваги та приведено області стійкості вказаних конфігурацій. Додатково, у роботі Кабрала та ін.[11] показано, що кільце вихорів залишиться положенням рівноваги за присутності вихору довільної інтенсивності в довільному полюсі

сфери. Кабрал та ін. провели аналіз стійкості та зобразили біфуркаційні діаграми за присутності вихору у полюсі сфери.

П. К. Ньютон та Р. Кідамбі у своїй роботі [22] класифікували та привели необхідні та достатні умови для того, щоб конфігурація із трьох вихорів була положенням рівноваги. Слідом за ними С. Пекарський та Дж. Марсден у роботі [40] дослідили стійкість рівнобедрених та рівносторонніх положень рівноваги, наведених у роботі Ньютона та Кідамбі. У Пекарського та Марсдена залишено відкритим питання про стійкість рівностороннього екваторіального положення рівноваги.

У роботі П. К. Ньютона та М. Джамалудіна [21] використано методи лінійної алгебри для дослідження положень відносної рівноваги. Вони привели необхідні і достатні умови для того, щоб конфігурація вихорів була положенням відносної рівноваги, а також дали приклади симетричних положень відносної рівноваги у формі правильних багатогранників. У випадку рівних інтенсивностей, приведені Ньютоном та Дамалудіном конфігурації дослідив Л. Г. Куракін у роботах [67, 27]. Він показав, що положення відносної рівноваги у формі тетраедра, октаедра та ікосаедра є стійкими, а у формі куба та додекаедра – нестійкими.

Систематичне дослідження симетричних положень відносної рівноваги точкових вихорів на сфері з використанням методів теорії груп та симплектичної геометрії проведено у роботі [33]. В даній роботі приведено класифікацію можливих симетричних положень рівноваги та проаналізовано частинні випадки, які являють собою однокільцеві та двокільцеві конфігурації з додатковими незалежними вихорами на полюсах сфери.

Більш детальний огляд історії розвитку вихрової динаміки можна знайти в статті [35]. Повний виклад теорії вихрового руху можна знайти в численній літературі по даній тематиці, яка включає як підручники так і спеціалізовані монографії [71, 36, 59, 61, 79, 77, 65, 50].

1.2. Методи дослідження стійкості гамільтонових систем

Мотивацією для розвитку методів дослідження стійкості гамільтонових систем послужила задача про стійкість рідких однорідних еліпсоїдів. Історія даної задачі веде до самого Ісаака Ньютона. Видатний вчений ініціював дані дослідження показавши, що еліпс обертання є положенням рівноваги для рідини, яка обертається. Слідом за Ньютоном над задачею працювали такі видатні вчені як: Маклорен, Джакобі, Майер, Ліувіль, Діріхле, Додекінд, Ріман, Пунккаре, Картан, Ляпунов та ін.[12].

Перший нелінійний критерій стійкості гамільтонових систем був отриманий Діріхле у роботі [14]. Він вказав, що якщо гамільтоніан досягає в положенні рівноваги свого строгого мінімуму або максимуму, то положення рівноваги є стійким. Раус у роботі [41] розвинув дану теорію привівши критерії нестійкості і означив стійкість відносних положень рівноваги.

Сучасна теорія нелінійної стійкості динамічних систем бере свій початок з широковідомої докторської дисертації О. М. Ляпунова на тему "Общая задача об устойчивости движения"[70]. Мотивом для розвитку даної теорії була саме задача про стійкість рідкого еліпсоїда, яку Олександр Михайловичу поставив його науковий керівник, Чебишев П. Л. У своїй роботі Ляпунов привів два широковідомі методи дослідження стійкості. Перший метод Ляпунова полягає в дослідженні стійкості системи шляхом інтегрування і знаходження розв'язків збуреної системи. Більш цікавим є другий, який не вимагає інтегрування, і полягає в відшуканні функції з певними властивостями. Існування такої функції, так званої функції Ляпунова, доводить стійкість або нестійкість досліджуваної системи. Основний результат про стійкість автор сформулював у вигляді наступної теореми⁶:

1.1. *Якщо диференціальні рівняння збуреного руху такі, що можна знайти знаковизначену функцію V , похідна якої V' в силу цих рівнянь*

⁶Приведено вільний переклад з роботи [70].

була б або знакосталою функцією протилежного з V знака, або тотожно рівною нулю, то не збурений рух є стійким.

Наслідком з цієї теореми є критерій Діріхле про стійкість гамільтонових систем. Користуючись своїм першим методом, Ляпунов наступну теорему про нестійкість⁷:

1.2. *Якщо серед власних значень лінеаризованої навколо положення рівноваги системи диференціальних рівнянь є хоча б одне з додатною дійсною частиною, то дана система є нестійкою.*

Четаєв у своїй роботі [81] розвинув теорію Ляпунова та привів, як приклад її застосування, доведення критерію Діріхле.

Наступне узагальнення критерію Діріхле міститься у роботі В. І. Арнольда[7, 51]. Він використавши властивості функцій Казимира довів, наступний критерій: якщо існує функція Казимира C для даної динамічної системи така, що перша варіація суми гамільтоніана H та функції C рівна 0 ($\delta(H + C) = 0$), друга варіація суми є знаковизначеною, тоді досліджувана система стійка. Також, в роботі В. І. Арнольда[7] закладено основи сучасного методу дослідження гамільтонових систем з симетріями. В ній автор виводить критерій стійкості динамічної системи у якій фазовий простір є групою, яка співпадає з групою симетрій цієї ж системи. Підхід запропонований Арнольдом отримує розвиток у роботах [38, 39, 42]. Згідно з теоремою Е. Нетер однопараметричні групи симетрій динамічної системи визначають перші інтеграли даної системи. Тоді використавши ці інтеграли можна провести редукцію системи і дослідити стійкість в фазовому просторі зредукованої системи. Метод енергії-моменту, розвинений у наведених роботах, працює на оригінальному, не зредукованому, фазовому просторі і полягає у використанні перших інтегралів породжених симетріями, які називаються моментами системи (по аналогії до імпульсу, який в англійській

⁷Сучасне формулювання теореми.

літературі називається лінійним моментом, та кутового моменту системи, яка має симетрію паралельного переносу та кутову симетрію відповідно). До повної енергії системи, тобто гамільтоніана, додаються моменти помножені на певні константи і аналіз стійкості проводиться вздовж варіацій, які залишають постійними використані моменти. Перетворений таким чином гамільтоніан буде функцією Ляпунова для відносного положення рівноваги породженого використаними симетріями (орбіта групи симетрій). Більш детальний виклад методу міститься у наступних розділах даної дисертаційної роботи.

Висновки до розділу 1

З наведеного у розділі 1 огляду можна зробити висновок, що задача дослідження стійкості є досить актуальною і на час написання дисертаційної роботи до кінця не вивченою. Все ще залишається відкритим питання класифікації можливих положень рівноваги. Навіть серед знайдених положень рівноваги дослідження стійкості проводиться лише для частинних випадків.

РОЗДІЛ 2

РІВНЯННЯ РУХУ ТОЧКОВИХ ВИХОРИВ НА СФЕРІ

В розділі виведено рівняння еволюції завихреності поля швидкостей на двовимірній поверхні. Отримані рівняння руху точкових вихорів в тонкому шарі ідеальної нестисливої рідини, що має форму сфери. Приведено гамільтоніан та перші інтеграли системи. Описано групу симетрій, яка є фазовим простором.

2.1. Рівняння завихреності поля швидкостей ідеальної нестисливої рідини у тонкому шарі

Нехай $\mathbf{u}(x, y, z, t)$ - швидкість частинки ідеальної нестисливої рідини розташованої в точці Евклідового тривимірного простору (x, y, z) в момент часу t . Тоді рівняння руху ідеальної нестисливої рідини можна записати у формі [68, 75, 69, 78]:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla P, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \end{cases} \quad (2.1)$$

де ρ - густина рідини, P - функція тиску. Скориставшись формулою [66]

$$\nabla \left(\frac{\mathbf{u}^2}{2} \right) = (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u}), \quad (2.2)$$

попереднє рівняння можна переписати у вигляді

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{\mathbf{u}^2}{2} \right) - \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u}) = -\frac{1}{\rho} \nabla P, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \end{cases} \quad (2.3)$$

Позначимо через $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$ завихреність поля швидкостей. Взявши операцію ротора від обох частин рівнянь (2.3), отримаємо

$$\begin{cases} \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \nabla \times \left(\nabla \left(\frac{\mathbf{u}^2}{2} \right) \right) - \nabla \times (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}) = -\frac{1}{\rho} \nabla \times (\nabla P), \\ \nabla \times (\nabla \cdot \mathbf{u}) = 0, \end{cases} \quad (2.4)$$

Скориставшись відомими формулами векторного аналізу [66]:

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla f) &= 0, \\ \nabla \times (\nabla \cdot \mathbf{u}) &= 0, \\ \nabla \times (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}) &= (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega} + \mathbf{u} (\nabla \cdot \boldsymbol{\omega}) - \boldsymbol{\omega} (\nabla \cdot \mathbf{u}), \end{aligned}$$

де f довільна двічі-диференційовна функція трьох змінних, отримаємо тривимірні рівняння еволюції завихреності поля швидкостей ідеальної неслививої рідини

$$\begin{cases} \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{u}, \\ \boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \end{cases} \quad (2.5)$$

Для дослідження руху рідини на поверхні, перейдемо до криволінійних координат $q_i(x, y, z), i = 1, 2, 3$. Скористаємось представленням диференційних операцій [66]:

$$\begin{aligned} (\nabla f)_i &= \frac{1}{H_i} \frac{\partial f}{\partial q_i}, \\ \nabla \cdot \mathbf{a} &= \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left(\frac{\partial(a_1 H_2 H_3)}{\partial q_1} + \frac{\partial(a_2 H_1 H_3)}{\partial q_2} + \frac{\partial(a_3 H_1 H_2)}{\partial q_3} \right), \\ (\nabla \times \mathbf{a})_1 &= \frac{1}{H_2 H_3} \left(\frac{\partial(a_3 H_3)}{\partial q_2} - \frac{\partial(a_2 H_2)}{\partial q_3} \right), \\ (\nabla \times \mathbf{a})_2 &= \frac{1}{H_1 H_3} \left(\frac{\partial(a_1 H_1)}{\partial q_3} - \frac{\partial(a_3 H_3)}{\partial q_1} \right), \\ (\nabla \times \mathbf{a})_3 &= \frac{1}{H_1 H_2} \left(\frac{\partial(a_2 H_2)}{\partial q_1} - \frac{\partial(a_1 H_1)}{\partial q_2} \right), \end{aligned}$$

$$((\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b})_i = \sum_{k=1}^3 \left[\frac{a_k}{H_k} \frac{\partial b_i}{\partial q_k} + \frac{b_k}{H_i H_k} \left(a_i \frac{\partial H_i}{\partial q_k} - a_k \frac{\partial H_k}{\partial q_i} \right) \right],$$

$$i = 1, 2, 3.$$

де H_i - коефіцієнти Ляме ($H_i^2 = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i}\right)^2$, $\mathbf{r} = (x, y, z)$), f - довільна двічі-диференційовна функція, \mathbf{a}, \mathbf{b} - довільні диференційовні вектори. У формулах наведено коваріантні компоненти векторів. Тоді рівняння (2.5) можна переписати у вигляді

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \omega_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 \left[\frac{u_k}{H_k} \frac{\partial \omega_i}{\partial q_k} + \frac{\omega_k}{H_i H_k} \left(u_i \frac{\partial H_i}{\partial q_k} - u_k \frac{\partial H_k}{\partial q_i} \right) \right] = \\ = \sum_{k=1}^3 \left[\frac{\omega_k}{H_k} \frac{\partial u_i}{\partial q_k} + \frac{u_k}{H_i H_k} \left(\omega_i \frac{\partial H_i}{\partial q_k} - \omega_k \frac{\partial H_k}{\partial q_i} \right) \right], \\ \omega_1 = \frac{1}{H_2 H_3} \left(\frac{\partial(u_3 H_3)}{\partial q_2} - \frac{\partial(u_2 H_2)}{\partial q_3} \right), \\ \omega_2 = \frac{1}{H_1 H_3} \left(\frac{\partial(u_1 H_1)}{\partial q_3} - \frac{\partial(u_3 H_3)}{\partial q_1} \right), \\ \omega_3 = \frac{1}{H_1 H_2} \left(\frac{\partial(u_2 H_2)}{\partial q_1} - \frac{\partial(u_1 H_1)}{\partial q_2} \right), \\ \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left(\frac{\partial(u_1 H_2 H_3)}{\partial q_1} + \frac{\partial(u_2 H_1 H_3)}{\partial q_2} + \frac{\partial(u_3 H_1 H_2)}{\partial q_3} \right) = 0. \end{array} \right. \quad (2.6)$$

Наведені рівняння є рівняннями еволюції поля завихреності ідеальної нестисливої рідини в ортогональних криволінійних координатах.

Розглянемо рух рідини у тонкому шарі, який має форму поверхні рівня $q_3 = \text{const}$. Такий рух буде характеризуватись відсутністю компоненти швидкості у напрямку q_3 , а інші компоненти швидкості будуть залежати тільки від q_1, q_2 . Користуючись даними міркуваннями допустимо, що $u_1 = u_1(q_1, q_2)$, $u_2 = u_2(q_1, q_2)$, $u_3 = 0$. Тоді рівняння завихреності поля швидкостей рідини, що рухається у тонкому шарі, можна записати у ви-

гляді

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \omega_3}{\partial t} + \frac{u_1}{H_1} \frac{\partial \omega_3}{\partial q_1} + \frac{u_2}{H_2} \frac{\partial \omega_3}{\partial q_2} = 0, \\ \omega_3 = \frac{1}{H_1 H_2} \left(\frac{\partial(u_2 H_2)}{\partial q_1} - \frac{\partial(u_1 H_1)}{\partial q_2} \right), \\ \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left(\frac{\partial(u_1 H_2 H_3)}{\partial q_1} + \frac{\partial(u_2 H_1 H_3)}{\partial q_2} \right) = 0. \end{array} \right. \quad (2.7)$$

Перше рівняння допускає наступний сингулярний розв'язок (сингулярний у розумінні, що рівняння перетворюється на тотожність у всіх точках, окрім скінченного числа):

$$\omega_3(q_1, q_2) = \frac{1}{H_1 H_2} \left[\sum_{j=1}^N \Gamma_j \delta(q_1 - q_1^j(t), q_2 - q_2^j(t)) \right]. \quad (2.8)$$

Слідом за Цермело [80], будемо називати сингулярності даного розв'язку точковими вихорами. У плоскому та сферичному випадку (як буде показано пізніше), поле швидкостей, яке відповідає даному розв'язку, має сингулярності у точках $q_1^j(t), q_2^j(t), j = 1, \dots, N$ типу $\frac{1}{r}$ (r - геодезична відстань до сингулярності), тобто поле швидкостей затухає як $\frac{1}{r}$ при віддаленні від сингулярності. Даний факт показує, що класичне означення точкового вихору, як особливості поля швидкостей та наведене вище, співпадають.

Циркуляцію поля швидкостей навколо сингулярності, будемо називати інтенсивністю точкового вихору.

Рівняння еволюції координат $q_1^j(t), q_2^j(t), j = 1, \dots, N$, які є параметрами даного розв'язку, виведені з другого та третього рівнянь системи (2.7), наведені у наступному параграфі для випадку сферичних координат, при $q_3 = r$.

Користуючись формулами двовимірного векторного аналізу рівняння

(2.7) можна записати у вигляді

$$\begin{cases} \frac{\partial \omega_3}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \omega_3 = 0, \\ \omega_3 = \nabla \times \mathbf{u}, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \end{cases} \quad (2.9)$$

Аналогічні рівняння отримуються із (2.5) якщо помітити, що на двовимірній поверхні $\omega_3 \perp \nabla$.

Перейдемо до розгляду конкретних ортогональних систем координат. Для перевірки наведених формул, запишемо рівняння еволюції поля завихреності ідеальної нестисливої рідини на площині. Тобто запишемо рівняння (2.7) у декартовій системі координат. Нехай $q_1 = x, q_2 = y, q_3 = z$. Тоді коефіцієнти Ляме рівні

$$H_1 = H_2 = H_3 = 1,$$

і рівняння (2.7) приймуть вигляд

$$\begin{cases} \frac{\partial \omega_z}{\partial t} + u_x \frac{\partial \omega_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial \omega_z}{\partial y} = 0, \\ \omega_z = \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}, \\ \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0. \end{cases} \quad (2.10)$$

Неважко бачити, що дані рівняння являють собою рівняння (2.9) записані в декартових координатах.

Для виведення рівнянь еволюції поля завихреності на поверхні сфери, скористаємось сферичними координатами

$$x = r \cos \phi \sin \theta,$$

$$y = r \sin \phi \sin \theta,$$

$$z = r \cos \theta,$$

при $q_1 = \phi, q_2 = \theta, q_3 = r$. Тоді

$$\begin{aligned} H_1 &= r \sin \theta, \\ H_2 &= r, \\ H_3 &= 1. \end{aligned}$$

Поверхнею рівня $q_3 = r = \text{const}$ є поверхня сфери радіусу r . Рівняння (2.7) приймуть вигляд

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \omega_r}{\partial t} + \frac{u_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial \omega_r}{\partial \phi} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial \omega_r}{\partial \theta} = 0, \\ \omega_r = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left(\frac{\partial(r u_\theta)}{\partial \phi} - \frac{\partial(r u_\phi \sin \theta)}{\partial \theta} \right), \\ \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left(\frac{\partial(r u_\phi)}{\partial \phi} + \frac{\partial(r u_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} \right) = 0. \end{array} \right. \quad (2.11)$$

2.2. Рівняння руху точкових вихорів

У випадку, коли рідина рухається по поверхні сфери радіусу r , можна ввести функцію току ψ , яка визначає поле швидкостей

$$\mathbf{u} = (\nabla \psi) \times \mathbf{e}_r, \quad (2.12)$$

де \mathbf{e}_r орт нормалі направлений вздовж радіусу сфери. Отримане поле швидкостей автоматично задовольняє третьому рівнянню (2.9).

Після підстановки (2.12) в друге рівняння (2.9) отримаємо скалярне співвідношення

$$\Delta \psi = -\omega,$$

де $\omega = \omega_r$. У сферичних координатах дане співвідношення прийме вигляд

$$\frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} = -\omega. \quad (2.13)$$

Переписавши у сферичних координатах співвідношення (2.12), отримаємо поле швидкостей

$$\begin{aligned} u_\phi &= -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \\ u_\theta &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \phi}, \end{aligned} \quad (2.14)$$

Оператор у лівій частині рівнянні (2.2) носить назву оператора Бельтрамі-Лапласа. Для того, щоб теорема Кельвіна для циркуляції виконувалась, тобто

$$\int_S \omega dS = 0,$$

де S -поверхня сфери, визначимо функцію Гріна G для оператора Бельтрамі-Лапласа наступним чином

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial G}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 G}{\partial \phi^2} = \\ = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left(\delta(\phi - \phi', \theta - \theta') - \frac{1}{4\pi} \right). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Останній доданок відповідає постійному полю завихреності, інтегральна циркуляція якого рівна -1, тобто рівна і протилежна за знаком до інтенсивності особливості в точці (ϕ', θ') . Дана особливість носить назву точкового вихору на сфері.

Рівнянню (2.15) задовольняє функція

$$G(\phi, \theta, \phi', \theta') = -\frac{1}{2\pi} \ln \sin\left(\frac{1}{2}\gamma(\phi, \theta, \phi', \theta')\right), \quad (2.16)$$

де $\gamma(\phi, \theta, \phi', \theta')$ - центральний кут між точками з координатами (ϕ, θ) та (ϕ', θ') . Використавши тригонометричну формулу для синусу половинного кута отримаємо

$$G = -\frac{1}{4\pi} \ln(1 - \cos \gamma). \quad (2.17)$$

Ця формула зручніша, оскільки $\cos \gamma$ можна виразити як

$$\cos \gamma = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\phi - \phi'). \quad (2.18)$$

Користуючись функцією Гріна (2.17), можемо знайти функцію току ψ як розв'язок рівняння (2.13)

$$\psi(\phi, \theta) = \int_S \omega(\phi', \theta') \ln(1 - \cos \gamma) r^2 \sin \theta' d\theta' d\phi'. \quad (2.19)$$

Щоб отримати рівняння руху N точкових вихорів на нерухомій сфері, скористаємось розв'язком (2.8) записаним у сферичних координатах

$$\omega(\phi, \theta) = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\sum_{j=1}^N \Gamma_j \delta(\phi - \phi^j(t), \theta - \theta^j(t)) \right]. \quad (2.20)$$

де Γ_j - інтенсивність j -го вихору. Після підстановки (2.20) у (2.19) користуючись (2.14) отримаємо

$$\begin{aligned} u_\phi &= -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \\ &= -\frac{1}{4\pi r} \sum_{j=1}^N \Gamma_j \frac{\kappa_j}{1 - \cos \gamma_j}, \\ u_\theta &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} = \\ &= -\frac{1}{4\pi r} \sum_{j=1}^N \Gamma_j \frac{\sin \theta_j \sin(\phi - \phi_j)}{1 - \cos \gamma_j}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

де $\gamma_j = \gamma(\phi, \theta, \phi_j, \theta_j)$ та $\kappa_j = \cos \theta \sin \theta_j \cos(\phi - \phi_j) - \sin \theta \cos \theta_j$.

Згідно з теоремою Гельмгольца, вихорі будуть рухатись як частинки рідини, тобто рівняння руху N точкових вихорів мають вигляд

$$\begin{aligned} \sin \theta_i \dot{\phi}_i &= \\ &= -\frac{1}{4\pi r^2} \sum_{j=1, j \neq i}^N \Gamma_j \frac{\kappa_{ij}}{1 - \cos \gamma_{ij}}, \\ \dot{\theta}_i &= -\frac{1}{4\pi r^2} \sum_{j=1, j \neq i}^N \Gamma_j \frac{\sin \theta_j \sin(\phi_i - \phi_j)}{1 - \cos \gamma_{ij}}, \end{aligned} \quad (2.22)$$

де $\gamma_{ij} = \gamma(\phi_i, \theta_i, \phi_j, \theta_j)$ та $\kappa_{ij} = \cos \theta_i \sin \theta_j \cos(\phi_i - \phi_j) - \sin \theta_i \cos \theta_j$.

Приведені рівняння можна записати у наступній векторній формі [36]:

$$\dot{\mathbf{x}}_i = \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{\Gamma_j}{2\pi r} \frac{\mathbf{x}_j \times \mathbf{x}_i}{(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)^2}, \quad (2.23)$$

де \mathbf{x}_i - вектор який з'єднує центр сфери з точкою, в якій знаходиться точковий вихор, тобто $\|\mathbf{x}_i\| = r$.

Для того щоб отримати рівняння руху точкових вихорів на сфері що обертається, до ω визначеного у (2.20), потрібно додати $\omega_o = 2\Omega \cos \theta / (r^2 \sin \theta)$.

Тоді рівняння руху у векторній формі приймуть вигляд

$$\dot{\mathbf{x}}_i = \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{\Gamma_j}{2\pi r} \frac{\mathbf{x}_j \times \mathbf{x}_i}{(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)^2} + \Omega \mathbf{e}_z \times \mathbf{x}_i, \quad (2.24)$$

де $\mathbf{e}_z = (0, 0, 1)$.

Користуючись (2.24) виведемо рівняння руху в змінних $l_{ij}^2 = (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)^2$. Для цього, від рівняння руху i -го вихору віднімемо рівняння руху j -го вихору у формі (2.24) і домножимо скалярно на $(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)$. Отримаємо

$$\begin{aligned} & (\dot{\mathbf{x}}_i - \dot{\mathbf{x}}_j) \cdot (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) = \\ = & \sum_{k=1, k \neq i, k \neq j}^N \frac{\Gamma_k}{2\pi r} \left[\frac{(\mathbf{x}_k \times \mathbf{x}_i) \cdot (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)}{(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_k)^2} - \frac{(\mathbf{x}_k \times \mathbf{x}_j) \cdot (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)}{(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k)^2} \right] + \\ & + \frac{\Gamma_j}{2\pi r} \frac{(\mathbf{x}_j \times \mathbf{x}_i) \cdot (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)}{(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)^2} - \frac{\Gamma_i}{2\pi r} \frac{(\mathbf{x}_i \times \mathbf{x}_j) \cdot (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)}{(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)^2} + \\ & + \Omega(\mathbf{e}_z \times \mathbf{x}_i) \cdot (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) - \Omega(\mathbf{e}_z \times \mathbf{x}_j) \cdot (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) = \\ = & \sum_{k=1, k \neq i, k \neq j}^N \frac{\Gamma_k}{2\pi r} \left[\frac{\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j \times \mathbf{x}_k}{(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k)^2} - \frac{\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j \times \mathbf{x}_k}{(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_k)^2} \right] + \\ & + \Omega \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{x}_i \times \mathbf{x}_j - \Omega \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{x}_i \times \mathbf{x}_j = \\ = & \sum_{k=1, k \neq i, k \neq j}^N \frac{\Gamma_k}{2\pi r} \left[\frac{\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j \times \mathbf{x}_k}{(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k)^2} - \frac{\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j \times \mathbf{x}_k}{(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_k)^2} \right], \end{aligned}$$

Оскільки $\frac{dl_{ij}^2}{dt} = 2(\dot{\mathbf{x}}_i - \dot{\mathbf{x}}_j) \cdot (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)$, тому

$$\frac{dl_{ij}^2}{dt} = \sum_{k=1, k \neq i, k \neq j}^N \frac{\Gamma_k V_{ijk}}{\pi r} \left(\frac{1}{l_{jk}^2} - \frac{1}{l_{ik}^2} \right), \quad (2.25)$$

де $V_{ijk} = \mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j \times \mathbf{x}_k$.

В подальшому будуть використані формули для площі трикутника з вершинами у довільних трьох вихорах (A_{ijk}), нормалі до площини трикутника (\mathbf{n}_{ijk}) та об'єму паралелепіпеда побудованого на трьох радіус-векторах довільних трьох точкових вихорів (V_{ijk})

$$A_{ijk}(t) = \pm \frac{1}{4} (2l_{ij}^2 l_{jk}^2 + 2l_{jk}^2 l_{ki}^2 + 2l_{ki}^2 l_{ij}^2 - l_{ij}^4 - l_{jk}^4 - l_{ki}^4)^{1/2}, \quad (2.26)$$

$$\mathbf{n}_{ijk} = (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \times (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3) = \mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_2 \times \mathbf{x}_3 + \mathbf{x}_3 \times \mathbf{x}_1, \quad (2.27)$$

$$V_{ijk}(t) = \pm \frac{1}{2} (16r^2 A_{ijk}^2 - l_{ij}^2 l_{jk}^2 l_{ki}^2)^{1/2}. \quad (2.28)$$

У випадку трьох вихорів будемо позначати $A = A_{123}$, $V = V_{123}$, $\mathbf{n} = \mathbf{n}_{123}$.
Похідні даних величин, згідно з рівняннями руху (2.25) та (2.23)

$$\dot{A} = \frac{V}{16\pi r A} \sum_{(i,j,k) \in S_3} \frac{l_{ij}^2 - l_{jk}^2}{l_{ki}^2} (\Gamma_i + \Gamma_k), \quad (2.29)$$

$$\dot{V} = \frac{1}{8\pi r} \left[2r^2 \sum_{(i,j,k) \in S_3} \frac{l_{ij}^2 - l_{jk}^2}{l_{ki}^2} (\Gamma_i + \Gamma_k) - \sum_{(i,j,k) \in S_3} l_{ij}^2 (\Gamma_i - \Gamma_j) \right] \quad (2.30)$$

$$\dot{\mathbf{n}} = \frac{1}{4\pi r} \sum_{(i,j,k) \in S_3} \left[\frac{\Gamma_i + \Gamma_j}{l_{ij}^2} - \frac{\Gamma_i + \Gamma_k}{l_{ki}^2} \right] l_{jk}^2 \mathbf{x}_i. \quad (2.31)$$

де $S_3 = \{(1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2)\}$.

2.3. Гамільтоніан та перші інтеграли руху.

Фазовий простір системи з N точкових вихорів на сфері складається з N сфер з виключенням точок, які відповідають зіткненням:

$$P = \{(x_1, x_2, \dots, x_N) \in S^2 \times S^2 \times \dots \times S^2 | x_i \neq x_j, i \neq j\}$$

З кожною сферою асоційовано ненульову інтенсивність вихору $\Gamma_i, i = 1, \dots, N$, рух якого вона характеризує. Простір містить симплектичну форму

$$\alpha = \sum_{i=1}^N \Gamma_i r^2 \sin \theta_i d\phi_i \wedge d\theta_i,$$

породжену натуральною формою площі на кожній сфері.

Рівняння (2.22) можна представити у вигляді рівнянь Гамільтона з наступним гамільтоніаном і канонічними змінними:

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{4\pi r^2} \sum_{i < j} \Gamma_i \Gamma_j \ln l_{ij}, \\ p &= \sqrt{|\Gamma_i|} \cos \theta_i, \quad q = \text{sign}(\Gamma_i) \sqrt{|\Gamma_i|} \phi_i, \\ \dot{p}_i &= \frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \dot{q}_i = -\frac{\partial H}{\partial p_i}, \end{aligned} \tag{2.32}$$

де $l_{ij}^2 = (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)^2 = 2r^2(1 - \cos \gamma_{ij})$.

Як видно з представлення (2.32) гамільтоніан системи залежить лише від l_{ij} , тому є інваріантним щодо діагональної дії групи $SO(3)$ на P .

Дужка Пуассона для даної Гамільтонової системи має вигляд:

$$\begin{aligned} \{f, g\} &= \sum_{k=1}^N \frac{1}{\Gamma_k} \left(\frac{\partial f}{\partial \cos \theta_k} \frac{\partial g}{\partial \phi_k} - \frac{\partial f}{\partial \phi_k} \frac{\partial g}{\partial \cos \theta_k} \right), \\ \{\phi_i, \cos \theta_j\} &= \frac{\delta_{ij}}{\Gamma_i}, \end{aligned} \tag{2.33}$$

де δ_{ij} - символ Кронекера.

Окрім Гамільтоніана, дана система допускає ще три інтеграли руху

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{1}{r} \sum_{i=1}^N \Gamma_i x_i = \sum_{i=1}^N \Gamma_i \sin \theta_i \cos \phi_i = \text{const}, \\ M_2 &= \frac{1}{r} \sum_{i=1}^N \Gamma_i y_i = \sum_{i=1}^N \Gamma_i \sin \theta_i \sin \phi_i = \text{const}, \\ M_3 &= \frac{1}{r} \sum_{i=1}^N \Gamma_i z_i = \sum_{i=1}^N \Gamma_i \cos \theta_i = \text{const}, \end{aligned} \tag{2.34}$$

які разом утворюють вектор $\mathbf{M} = (M_1, M_2, M_3)$, котрий називається моментом завихреності [36]. Також корисно ввести до розгляду вектор, який називається центром завихреності

$$\mathbf{c} = \frac{\mathbf{M}}{\Gamma}, \quad (2.35)$$

де $\Gamma = \sum_{i=1}^N \Gamma_i$.

Зазначимо, що H, M_1, M_2, M_3 в загальному випадку дають нам тільки три незалежних, інволютивних інтеграли

$$\begin{aligned} \{H, M_3\} &= 0, \quad \{H, M_1^2 + M_2^2\} = 0, \\ \{M_3, M_1^2 + M_2^2\} &= 0. \end{aligned} \quad (2.36)$$

У випадку коли $\mathbf{M} = \mathbf{0}$ із співвідношень

$$\begin{aligned} \{M_2, M_1\} &= M_3, \quad \{M_1, M_3\} = M_2, \\ \{M_3, M_2\} &= M_1, \end{aligned} \quad (2.37)$$

отримаємо чотири незалежних, інволютивних інтеграли. Користуючись наведеними спостереженнями з теореми Ліувіля [52] слідує наступна теорема [36, 59]:

2.1. *Задача про рух 3-х вихорів на сфері повністю інтегровна для вихорів довільної інтенсивності. Якщо центр завихреності рівний нулю, то задача про рух 4-х вихорів на сфері також інтегровна.*

Висновки до розділу 2

1. У розділі 2 виведено рівняння руху точкових вихорів на площині. Хоча на перший погляд вони представляють собою чисто кінематичні умови руху точки, в якій знаходиться вихор, проте, як можна бачити з виведення, ці рівняння виражають динамічні закони руху, які впливають з рівнянь руху Ейлера для ідеальної нестисливої рідини.

2. Описано геометрію фазового простору.
3. Приведено перші інтеграли системи і доведено інтегровність задачі про рух трьох точкових вихорів на сфері.

РОЗДІЛ 3

ПОЛОЖЕННЯ РІВНОВАГИ ТОЧКОВИХ ВИХОРИВ НА СФЕРІ

В розділі приведено класифікацію фіксованих та відносних положень рівноваги трьох точкових вихорів на поверхні сфери. Продемонстровано метод за допомогою якого, можна перевірити чи задана конфігурація вихорів є положенням рівноваги. Користуючись приведеним методом, серед правильних багатогранників вписаних в сферу знайдено конфігурації, які є положеннями рівноваги .

3.1. Фіксовані положення рівноваги трьох вихорів

Опис можливих фіксованих положень рівноваги трьох точкових вихорів міститься у твердженнях:

3.1. *Для того щоб система із трьох вихорів на сфері була фіксованим положенням рівноваги необхідно і достатньо, щоб*

$$\sum_{i=1}^3 \Gamma_i (\Gamma_j + \Gamma_k) \mathbf{x}_i = 0, \forall j \neq k \neq i. \quad (3.1)$$

Наслідок 3.2. *З Твердження 3.1 випливає, що всі положення фіксованої рівноваги лежать на великих колах.*

3.3. *У положенні фіксованої рівноваги трьох точкових вихорів $\mathbf{c} = 0$ тоді і тільки тоді, коли $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_3$ і відповідні фіксовані положення рівноваги є рівносторонніми трикутниками.*

3.4. *Якщо інтенсивності вихорів не рівні між собою, тоді положення*

фіксованої рівноваги не вироджені ($\mathbf{c} \neq 0$) і задовольняють умовам

$$\Gamma_1 \tan \alpha_1 = \Gamma_2 \tan \alpha_2 = \Gamma_3 \tan \alpha_3, \quad (3.2)$$

де $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ - кути трикутника з вершинами у точках в яких знаходяться вихори з інтенсивностями $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ відповідно.

Щоб довести необхідність у твердженні 3.1, скористаємось наступною лемою:

Лема 3.5. Для того, щоб конфігурація із N точкових вихорів на сфері була положенням фіксованої рівноваги необхідно щоб виконувалось одне із співвідношень:

$$1) \sum_{i=1}^N \Gamma_i \mathbf{x}_i (\Gamma - \Gamma_i) = 0, \quad (3.3)$$

$$2) \mathbf{M}\Gamma = \sum_{i=1}^N \Gamma_i^2 \mathbf{x}_i. \quad (3.4)$$

Для доведення леми покладемо рівною нулю ліву частину рівнянь (2.23) та домножимо її на $2\pi r$. В результаті отримаємо:

$$\sum_{j=1, j \neq i}^N \Gamma_j \frac{\mathbf{x}_j \times \mathbf{x}_i}{(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)^2} = 0, \quad (3.5)$$

Домножимо зліва векторно на $\Gamma_i \mathbf{x}_i$:

$$\Gamma_i \mathbf{x}_i \times \sum_{j=1, j \neq i}^N \Gamma_j \frac{\mathbf{x}_j \times \mathbf{x}_i}{(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)^2} = 0, \quad (3.6)$$

Далі, користуючись

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_i \times (\mathbf{x}_j \times \mathbf{x}_i) &= (\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_i) \mathbf{x}_j - (\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j) \mathbf{x}_i = \\ &= r^2 \mathbf{x}_j - (\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j) \mathbf{x}_i, \end{aligned}$$

просумувавши по i , отримаємо

$$\sum_{i, j=1, i \neq j}^N \frac{\Gamma_i \Gamma_j}{l_{ij}^2} \mathbf{x}_i \times (\mathbf{x}_j \times \mathbf{x}_i) =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1, i < j}^N \frac{\Gamma_i \Gamma_j}{l_{ij}^2} (r^2 \mathbf{x}_i + r^2 \mathbf{x}_j - (\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j) \mathbf{x}_i - (\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j) \mathbf{x}_j) = \\
&= \sum_{i=1, i < j}^N \frac{\Gamma_i \Gamma_j}{l_{ij}^2} (r^2 - (\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j)) (\mathbf{x}_i + \mathbf{x}_j) = \\
&= \sum_{i=1, i < j}^N \frac{\Gamma_i \Gamma_j}{2l_{ij}^2} l_{ij}^2 (\mathbf{x}_i + \mathbf{x}_j) = 0.
\end{aligned}$$

Тобто

$$\begin{aligned}
&\Gamma_1 \Gamma_2 (\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) + \Gamma_1 \Gamma_3 (\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_3) + \dots + \Gamma_{N-1} \Gamma_N (\mathbf{x}_{N-1} + \mathbf{x}_N) = \\
&= \Gamma_1 \mathbf{x}_1 \left(\sum_{i=2}^N \Gamma_i \right) + \Gamma_2 \mathbf{x}_2 \left(\sum_{i=1, i \neq 2}^N \Gamma_i \right) + \dots + \Gamma_N \mathbf{x}_N \left(\sum_{i=1}^{N-1} \Gamma_i \right) = 0, \Rightarrow \\
&\sum_{i=1}^N \Gamma_i \mathbf{x}_i (\Gamma - \Gamma_i) = 0, \Rightarrow \\
&\mathbf{M}\Gamma = \sum_{i=1}^N \Gamma_i^2 \mathbf{x}_i. \tag{3.7}
\end{aligned}$$

Що й доводить лему. З леми слідує необхідність у твердженні 3.1.

Для доведення достатності у твердженні 3.1 допустимо, що співвідношення (3.1) справедливе, тобто

$$\begin{aligned}
&\Gamma_1 (\Gamma_2 + \Gamma_3) \mathbf{x}_1 + \Gamma_2 (\Gamma_3 + \Gamma_1) \mathbf{x}_2 + \\
&+ \Gamma_3 (\Gamma_1 + \Gamma_2) \mathbf{x}_3 = 0, \tag{3.8}
\end{aligned}$$

домноживши скалярно на $\mathbf{x}_i, i = 1, 2, 3$ отримаємо

$$\begin{aligned}
&\Gamma_2 (\Gamma_3 + \Gamma_1) l_{12}^2 + \Gamma_3 (\Gamma_1 + \Gamma_2) l_{31}^2 = \\
&= \Gamma_1 (\Gamma_2 + \Gamma_3) l_{12}^2 + \Gamma_3 (\Gamma_1 + \Gamma_2) l_{23}^2 = \\
&= \Gamma_1 (\Gamma_2 + \Gamma_3) l_{31}^2 + \Gamma_2 (\Gamma_1 + \Gamma_3) l_{23}^2 = \\
&= 2r^2 [\Gamma_1 (\Gamma_2 + \Gamma_3) + \Gamma_2 (\Gamma_1 + \Gamma_3) + \Gamma_3 (\Gamma_1 + \Gamma_2)]. \tag{3.9}
\end{aligned}$$

Тоді з розв'язків даної лінійної (щодо l_{ij}^2) системи знайдемо

$$(\Gamma_1 + \Gamma_2) l_{31}^2 = (\Gamma_1 + \Gamma_3) l_{12}^2,$$

$$(\Gamma_2 + \Gamma_3)l_{12}^2 = (\Gamma_1 + \Gamma_2)l_{23}^2. \quad (3.10)$$

Тепер, користуючись даними співвідношеннями, з рівнянь руху (2.23) отримаємо $\dot{\mathbf{x}}_i = 0$.

З співвідношення (3.1) слідує, що вектори $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ - лінійно залежні. Тобто вони лежать в одній площині, яка проходить через центр сфери. Отже вихори знаходяться на великому колі, що доводить наслідок 3.2.

Доведемо твердження 3.3. Допустимо, що $\mathbf{c} = 0$. Тоді $\mathbf{M} = \sum \Gamma_i \mathbf{x}_i = 0$ і для фіксованих положень рівноваги з (3.1) слідує, що $\mathbf{M}\Gamma = \sum \Gamma_i^2 \mathbf{x}_i = 0$. Домножимо $\sum \Gamma_i \mathbf{x}_i$ на Γ_1 . Отриманий результат віднімемо від $\sum \Gamma_i^2 \mathbf{x}_i = 0$. Тоді

$$\Gamma_2(\Gamma_2 - \Gamma_1)\mathbf{x}_2 = \Gamma_3(\Gamma_1 - \Gamma_3)\mathbf{x}_3. \quad (3.11)$$

Звідки слідує, що або $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_3$, або вектори \mathbf{x}_2 та \mathbf{x}_3 колінеарні. Подібні перетворення приводять до аналогічного результату щодо векторів \mathbf{x}_1 та \mathbf{x}_3 , тобто або всі інтенсивності рівні, або \mathbf{x}_1 та \mathbf{x}_3 колінеарні. Але \mathbf{x}_3 не може бути колінеарним з \mathbf{x}_1 та \mathbf{x}_2 одночасно. Тому $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_3$.

Якщо ж допустити, що $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_3$ то з (3.8) отримаємо, що $\mathbf{c} = 0$.

З $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_3$ та $\mathbf{c} = 0$ слідує, що $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3 = 0$. Ця умова якраз і говорить про те, що вихори знаходяться у вершинах правильного трикутника.

Щоб довести твердження 3.4, з (3.10) маємо

$$\begin{aligned} \Gamma_2 &= \Gamma_1 \frac{l_{12}^2 + l_{23}^2 - l_{31}^2}{l_{12}^2 + l_{31}^2 - l_{23}^2}, \\ \Gamma_3 &= \Gamma_1 \frac{l_{23}^2 + l_{31}^2 - l_{12}^2}{l_{12}^2 + l_{31}^2 - l_{23}^2}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Користуючись теоремою косинусів для трикутника побудованого на вихорах з попереднього співвідношення отримаємо

$$\begin{aligned} \Gamma_2 l_{31} \cos \alpha_1 &= \Gamma_1 l_{23} \cos \alpha_2, \\ \Gamma_3 l_{12} \cos \alpha_1 &= \Gamma_1 l_{23} \cos \alpha_3. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Далі, користуючись теоремою синусів, отримаємо результат третього твердження.

Кілька зауважень, щодо фіксованих положень рівноваги:

Зауваження 3.1. У випадку площини, тільки колінеарні положення рівноваги можуть бути фіксованими положеннями рівноваги. У випадку сфери фіксовані положення рівноваги є системами з вихорами розташованими на великому колі.

Зауваження 3.2. У випадку площини, тільки коли $\Gamma_1, \Gamma_2 > 0, \Gamma_3 < 0$ існують фіксовані положення рівноваги. На сфері ж, положення фіксованої рівноваги можуть існувати для обох випадків: $\Gamma_1, \Gamma_2 > 0, \Gamma_3 < 0$ та $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3 > 0$.

3.2. Фіксовані положення рівноваги чотирьох вихорів

Опис можливих положень фіксованої рівноваги чотирьох точкових вихорів на сфері міститься у наступному твердженні:

3.6. *Конфігурація із чотирьох точкових вихорів буде положенням фіксованої рівноваги у одному із двох випадків:*

1. *Жодні три вихори не лежать на великому колі. інтенсивності та міжвихреві відстані задовольняють*

$$\begin{aligned}
 & l_{12}^2 \Gamma_2 (\Gamma_1 + \Gamma_3 + \Gamma_4) + l_{13}^2 \Gamma_3 (\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_4) + \\
 & + l_{14}^2 \Gamma_4 (\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3) = l_{12}^2 \Gamma_1 (\Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4) + \\
 & + l_{23}^2 \Gamma_3 (\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_4) + l_{24}^2 \Gamma_4 (\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3) = \\
 & = l_{13}^2 \Gamma_1 (\Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4) + l_{23}^2 \Gamma_2 (\Gamma_1 + \Gamma_3 + \Gamma_4) + \\
 & + l_{34}^2 \Gamma_4 (\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3) = l_{14}^2 \Gamma_1 (\Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4) + \\
 & + l_{24}^2 \Gamma_2 (\Gamma_1 + \Gamma_3 + \Gamma_4) + l_{34}^2 \Gamma_3 (\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_4) = \\
 & = 2r^2 [\Gamma_1 (\Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4) + \Gamma_2 (\Gamma_1 + \Gamma_3 + \Gamma_4) + \\
 & + \Gamma_3 (\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_4) + \Gamma_4 (\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3)].
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

$$\begin{aligned}
& l_{24}^2 l_{34}^2 (V_{123} V_{124} \Gamma_1 \Gamma_2 + V_{123} V_{134} \Gamma_1 \Gamma_3) - \\
& - l_{12}^2 l_{34}^2 (V_{123} V_{124} \Gamma_1 \Gamma_2 - V_{134} V_{234} \Gamma_3 \Gamma_4) - \\
& - l_{12}^2 l_{24}^2 (V_{123} V_{134} \Gamma_1 \Gamma_3 + V_{134} V_{234} \Gamma_3 \Gamma_4) = 0, \\
& l_{24}^2 l_{34}^2 (V_{123} V_{124} \Gamma_1 \Gamma_2 + V_{123} V_{134} \Gamma_1 \Gamma_3) - \\
& - l_{13}^2 l_{34}^2 (V_{123} V_{124} \Gamma_1 \Gamma_2 + V_{124} V_{234} \Gamma_2 \Gamma_4) - \\
& - l_{13}^2 l_{24}^2 (V_{123} V_{134} \Gamma_1 \Gamma_3 - V_{124} V_{234} \Gamma_2 \Gamma_4) = 0, \\
& l_{24}^2 l_{34}^2 (V_{124} \Gamma_1 \Gamma_2 + V_{134} \Gamma_1 \Gamma_3) - \\
& - l_{14}^2 l_{34}^2 (V_{124} \Gamma_1 \Gamma_2 - V_{234} \Gamma_2 \Gamma_3) - \\
& - l_{14}^2 l_{24}^2 (V_{134} \Gamma_1 \Gamma_3 + V_{234} \Gamma_2 \Gamma_3) = 0, \\
& l_{24}^2 l_{34}^2 (V_{123} V_{124} \Gamma_2 + V_{123} V_{134} \Gamma_3) - \\
& - l_{23}^2 l_{34}^2 (V_{123} V_{124} \Gamma_2 - V_{124} V_{134} \Gamma_4) - \\
& - l_{23}^2 l_{24}^2 (V_{123} V_{134} \Gamma_3 + V_{124} V_{134} \Gamma_4) = 0.
\end{aligned} \tag{3.15}$$

2. *Вихори лежать на великому колі. Інтенсивності та координати задовольняють співвідношенням (3.14) та*

$$V_{123} = V_{124} = V_{134} = V_{234} = 0, \tag{3.16}$$

$$\dot{V}_{123} = \dot{V}_{124} = \dot{V}_{134} = \dot{V}_{234} = 0. \tag{3.17}$$

Із леми 3.5 слідує, що якщо три радіус-вектори лежать в одній площині, то для того щоб лінійна комбінація (3.3) була рівна нулю необхідно, щоб четвертий радіус-вектор лежав у тій же площині. Тобто якщо хоча б один $V_{ijk} = \mathbf{x}_i \cdot (\mathbf{x}_j \times \mathbf{x}_k)$ рівний 0, тоді всі інші V також рівні 0. Тому маємо поділ на 2 випадки наведені у твердженні 3.6.

Дослідимо випадок $V_{ijk} \neq 0$, $(i, j, k) \in \{(1, 2, 3), (1, 2, 4), (1, 3, 4), (2, 3, 4)\}$. Поклавши рівну нулю ліву частину в рівняннях руху (2.25) і домноживши на πr отримаємо:

$$\Gamma_k V_{ijk} \left(\frac{1}{l_{jk}^2} - \frac{1}{l_{ik}^2} \right) + \Gamma_l V_{ijl} \left(\frac{1}{l_{jl}^2} - \frac{1}{l_{il}^2} \right) = 0, \tag{3.18}$$

де $i, j, k, l = 1, \dots, 4, i \neq j \neq k \neq l$. Розпишемо систему (3.18) в повному вигляді

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_3 V_{123} \left(\frac{1}{l_{23}^2} - \frac{1}{l_{13}^2} \right) + \Gamma_4 V_{124} \left(\frac{1}{l_{24}^2} - \frac{1}{l_{14}^2} \right) = 0, \\ \Gamma_2 V_{132} \left(\frac{1}{l_{23}^2} - \frac{1}{l_{12}^2} \right) + \Gamma_4 V_{134} \left(\frac{1}{l_{34}^2} - \frac{1}{l_{14}^2} \right) = 0, \\ \Gamma_2 V_{142} \left(\frac{1}{l_{24}^2} - \frac{1}{l_{12}^2} \right) + \Gamma_3 V_{143} \left(\frac{1}{l_{34}^2} - \frac{1}{l_{13}^2} \right) = 0, \\ \Gamma_1 V_{231} \left(\frac{1}{l_{13}^2} - \frac{1}{l_{12}^2} \right) + \Gamma_4 V_{234} \left(\frac{1}{l_{34}^2} - \frac{1}{l_{24}^2} \right) = 0, \\ \Gamma_1 V_{241} \left(\frac{1}{l_{14}^2} - \frac{1}{l_{12}^2} \right) + \Gamma_3 V_{243} \left(\frac{1}{l_{34}^2} - \frac{1}{l_{23}^2} \right) = 0, \\ \Gamma_1 V_{341} \left(\frac{1}{l_{14}^2} - \frac{1}{l_{13}^2} \right) + \Gamma_2 V_{342} \left(\frac{1}{l_{24}^2} - \frac{1}{l_{23}^2} \right) = 0, \end{array} \right. \quad (3.19)$$

Використавши властивості мішаного добутку, отримаємо

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Gamma_3 V_{123} \frac{1}{l_{13}^2} - \Gamma_4 V_{124} \frac{1}{l_{14}^2} + \Gamma_3 V_{123} \frac{1}{l_{23}^2} + \Gamma_4 V_{124} \frac{1}{l_{24}^2} = 0, \\ \Gamma_2 V_{123} \frac{1}{l_{12}^2} - \Gamma_4 V_{134} \frac{1}{l_{14}^2} - \Gamma_2 V_{123} \frac{1}{l_{23}^2} + \Gamma_4 V_{134} \frac{1}{l_{34}^2} = 0, \\ \Gamma_2 V_{124} \frac{1}{l_{12}^2} + \Gamma_3 V_{134} \frac{1}{l_{13}^2} - \Gamma_2 V_{124} \frac{1}{l_{24}^2} - \Gamma_3 V_{134} \frac{1}{l_{34}^2} = 0, \\ -\Gamma_1 V_{123} \frac{1}{l_{12}^2} + \Gamma_1 V_{123} \frac{1}{l_{13}^2} - \Gamma_4 V_{234} \frac{1}{l_{24}^2} + \Gamma_4 V_{234} \frac{1}{l_{34}^2} = 0, \\ -\Gamma_1 V_{124} \frac{1}{l_{12}^2} + \Gamma_1 V_{124} \frac{1}{l_{14}^2} + \Gamma_3 V_{234} \frac{1}{l_{23}^2} - \Gamma_3 V_{234} \frac{1}{l_{34}^2} = 0, \\ -\Gamma_1 V_{134} \frac{1}{l_{13}^2} + \Gamma_1 V_{134} \frac{1}{l_{14}^2} - \Gamma_2 V_{234} \frac{1}{l_{23}^2} + \Gamma_2 V_{234} \frac{1}{l_{24}^2} = 0, \end{array} \right. \quad (3.20)$$

Дана система має двовимірне ядро. Це дозволяє зменшити кількість достатніх умов:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{l_{12}^2} (V_{123} V_{124} \Gamma_1 \Gamma_2 + V_{123} V_{134} \Gamma_1 \Gamma_3) - \frac{1}{l_{24}^2} (V_{123} V_{124} \Gamma_1 \Gamma_2 - V_{134} V_{234} \Gamma_3 \Gamma_4) - \\ & \quad - \frac{1}{l_{34}^2} (V_{123} V_{134} \Gamma_1 \Gamma_3 + V_{134} V_{234} \Gamma_3 \Gamma_4) = 0, \\ & \frac{1}{l_{13}^2} (V_{123} V_{124} \Gamma_1 \Gamma_2 + V_{123} V_{134} \Gamma_1 \Gamma_3) - \frac{1}{l_{34}^2} (V_{123} V_{134} \Gamma_1 \Gamma_3 - V_{124} V_{234} \Gamma_2 \Gamma_4) - \\ & \quad - \frac{1}{l_{24}^2} (V_{123} V_{124} \Gamma_1 \Gamma_2 + V_{124} V_{234} \Gamma_2 \Gamma_4) = 0, \\ & \frac{1}{l_{14}^2} (V_{124} \Gamma_1 \Gamma_2 + V_{134} \Gamma_1 \Gamma_3) - \frac{1}{l_{24}^2} (V_{124} \Gamma_1 \Gamma_2 - V_{234} \Gamma_2 \Gamma_3) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{l_{34}^2} (V_{134}\Gamma_1\Gamma_3 + V_{234}\Gamma_2\Gamma_3) = 0, \\
& \frac{1}{l_{23}^2} (V_{123}V_{124}\Gamma_2 + V_{123}V_{134}\Gamma_3) - \frac{1}{l_{24}^2} (V_{123}V_{124}\Gamma_2 - V_{124}V_{134}\Gamma_4) - \\
& -\frac{1}{l_{34}^2} (V_{123}V_{134}\Gamma_3 + V_{124}V_{134}\Gamma_4) = 0.
\end{aligned}$$

Домноживши на $l_{12}^2 l_{24}^2 l_{34}^2$, $l_{13}^2 l_{24}^2 l_{34}^2$, $l_{14}^2 l_{24}^2 l_{34}^2$, $l_{23}^2 l_{24}^2 l_{34}^2$ відповідні рівняння отримаємо співвідношення (3.15).

В обох випадках справедливе твердження леми 3.5. Тобто в положенні фіксованої рівноваги виконуються умови

$$\begin{aligned}
& \Gamma_1(\Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4)\mathbf{x}_1 + \Gamma_2(\Gamma_1 + \Gamma_3 + \Gamma_4)\mathbf{x}_2 + \\
& \Gamma_3(\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_4)\mathbf{x}_3 + \Gamma_4(\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3)\mathbf{x}_4 = 0,
\end{aligned}$$

Як і при доведенні твердження 3.1, домножимо дане рівняння скалярно на \mathbf{x}_i , $i = 1, \dots, 4$. Отримаємо

$$\begin{aligned}
& l_{12}^2 \Gamma_2(\Gamma_1 + \Gamma_3 + \Gamma_4) + l_{13}^2 \Gamma_3(\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_4) + \\
& + l_{14}^2 \Gamma_4(\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3) = l_{12}^2 \Gamma_1(\Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4) + \\
& + l_{23}^2 \Gamma_3(\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_4) + l_{24}^2 \Gamma_4(\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3) = \\
& = l_{13}^2 \Gamma_1(\Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4) + l_{23}^2 \Gamma_2(\Gamma_1 + \Gamma_3 + \Gamma_4) + \\
& + l_{34}^2 \Gamma_4(\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3) = l_{14}^2 \Gamma_1(\Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4) + \\
& + l_{24}^2 \Gamma_2(\Gamma_1 + \Gamma_3 + \Gamma_4) + l_{34}^2 \Gamma_3(\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_4) = \\
& = 2r^2 [\Gamma_1(\Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4) + \Gamma_2(\Gamma_1 + \Gamma_3 + \Gamma_4) + \\
& + \Gamma_3(\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_4) + \Gamma_4(\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3)],
\end{aligned}$$

Зауваження 3.3. Зазначимо, що особливим розв'язком системи (3.19) є конфігурація у формі тетраедра з рівними інтенсивностями. В даному положенні рівноваги отримаємо $\mathbf{c} = 0$.

3.3. Положення відносної рівноваги трьох вихорів

Для знаходження положень відносної рівноваги трьох точкових вихорів скористаємось спостереженням $\mathbf{c} \cdot \mathbf{x}_i = \frac{\Gamma_i}{\Gamma} = \text{const}$. Тобто кожен вихор рухається по поверхні конуса центральна вісь якого спів напрямлена з вектором \mathbf{c} . Оскільки кожна сторона трикутника побудованого на вихорах має фіксовану величину, бачимо що кожне положення відносної рівноваги описується однією частотою $\dot{\phi} = \omega$ (частота обертання навколо вектора \mathbf{c}). У випадку коли $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$ швидкість кожного вихору має вигляд $\dot{\mathbf{x}}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}_i$, де $\boldsymbol{\omega} = \omega \frac{\mathbf{c}}{\|\mathbf{c}\|}$. Опис можливих положень відносної рівноваги трьох вихорів міститься у твердженнях:

3.7. *Усі вироджені положення відносної рівноваги лежать на великому колі і задовольняють співвідношенням*

$$\frac{\Gamma_1}{\sin(2\alpha_1)} = \frac{\Gamma_2}{\sin(2\alpha_2)} = \frac{\Gamma_3}{\sin(2\alpha_3)}. \quad (3.21)$$

Вихори обертаються навколо фіксованого вектора:

$$\mathbf{x} = -\frac{1}{2\pi r} \left(\frac{\Gamma_1 \mathbf{x}_1(0)}{l_{23}^2} + \frac{\Gamma_2 \mathbf{x}_2(0)}{l_{31}^2} + \frac{\Gamma_3 \mathbf{x}_3(0)}{l_{12}^2} \right), \quad (3.22)$$

з частотою

$$\omega = \frac{1}{2\pi r} \left[r^2 \left(\frac{\Gamma_1}{l_{23}^2} + \frac{\Gamma_2}{l_{31}^2} + \frac{\Gamma_3}{l_{12}^2} \right) - \frac{\Gamma_1 \Gamma_2 l_{12}^2 + \Gamma_2 \Gamma_3 l_{23}^2 + \Gamma_1 \Gamma_3 l_{13}^2}{l_{12}^2 l_{23}^2 l_{31}^2} \right]. \quad (3.23)$$

3.8. *У не вироджених положеннях відносної рівноваги ($\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$) вихори або лежать у вершинах правильного трикутника та обертаються навколо вектора \mathbf{c} з частотою*

$$\omega = \frac{1}{2\pi r s^2} [\Gamma^2 r^2 - 3h \Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_3 s^2]^{1/2}, \quad (3.24)$$

де $l_{12} = l_{23} = l_{31} = s$ та $h = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{\Gamma_i}$, або лежать на великому колі у вершинах рівнобедреного прямокутного трикутника та обертаються

навколо вектора \mathbf{c} з частотою

$$\omega = \frac{1}{4\pi r^2} [\Gamma_1^2 - (\Gamma_2 - \Gamma_3)^2]^{1/2}, \quad (3.25)$$

коли $l_{12} = l_{13} = \sqrt{2}r$, $l_{23} = 2r$.

Щоб довести твердження 3.7, використаємо

$$\mathbf{c} = 0, \quad \Rightarrow \quad \Gamma_1 \mathbf{x}_1 + \Gamma_2 \mathbf{x}_2 + \Gamma_3 \mathbf{x}_3 = 0, \quad (3.26)$$

Домноживши скалярно на \mathbf{x}_i , $i = 1, 2, 3$, отримаємо

$$\begin{aligned} \Gamma_2 l_{12}^2 + \Gamma_3 l_{31}^2 &= \Gamma_3 l_{23}^2 + \Gamma_1 l_{12}^2 = \\ &= \Gamma_1 l_{31}^2 + \Gamma_2 l_{23}^2 = 2\Gamma. \end{aligned} \quad (3.27)$$

З отриманих співвідношень можемо записати Γ_2 та Γ_3 в термінах Γ_1 та l_{ij}

$$\begin{aligned} \Gamma_2 &= \Gamma_1 \frac{l_{31}^2 (l_{13}^2 + l_{23}^2 - l_{31}^2)}{l_{23}^2 (l_{31}^2 + l_{12}^2 - l_{23}^2)}, \\ \Gamma_3 &= \Gamma_1 \frac{l_{12}^2 (l_{23}^2 + l_{31}^2 - l_{12}^2)}{l_{23}^2 (l_{31}^2 + l_{12}^2 - l_{23}^2)}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Користуючись теоремами синусів та косинусів останні співвідношення можна записати у вигляді

$$\frac{\Gamma_1}{\sin(2\alpha_1)} = \frac{\Gamma_2}{\sin(2\alpha_2)} = \frac{\Gamma_3}{\sin(2\alpha_3)}. \quad (3.29)$$

Щоб отримати вирази для \mathbf{x} та ω , скористаємось одним із рівнянь руху

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = \frac{1}{2\pi r} \left[\frac{\Gamma_2 \mathbf{x}_2 \times \mathbf{x}_1}{l_{12}^2} + \frac{\Gamma_3 \mathbf{x}_3 \times \mathbf{x}_1}{l_{31}^2} \right]. \quad (3.30)$$

Згідно з (3.27) і враховуючи, що вихори знаходяться у положенні відносної рівноваги, отримаємо

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = \frac{\Gamma_2 \mathbf{x}_2 \times \mathbf{x}_1}{2\pi r} \left(\frac{1}{l_{12}^2} - \frac{1}{l_{31}^2} \right) = k_1 (\mathbf{x}_2 \times \mathbf{x}_1). \quad (3.31)$$

Аналогічним чином можна отримати

$$\dot{\mathbf{x}}_2 = k_2 (\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2), \quad (3.32)$$

Домноживши тепер (3.31) на k_2 , (3.32) на k_1 і склавши ці добутки отримаємо

$$k_2 \dot{\mathbf{x}}_1 + k_1 \dot{\mathbf{x}}_2 = 0, \quad \Rightarrow \quad k_2 \mathbf{x}_1 + k_1 \mathbf{x}_2 \equiv \mathbf{x} = \text{const} \quad (3.33)$$

Тоді $\dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{x} \times \mathbf{x}_1$, звідки слідує співвідношення (3.22), (3.23). Що завершує доведення твердження 3.7

Для доведення твердження 3.8 використаємо той факт, що кожен вихор рухається на фіксованій широті і обертається навколо вектора \mathbf{c} з постійною кутовою швидкістю. Звичайно, якщо вихор знаходиться на осі обертання, він знаходиться у фіксованій точці і кутова швидкість для нього невизначена.

Перейдемо до системи координат в якій вісь Oz спів напрямлена з \mathbf{c} . Тоді кутова швидкість буде рівною $\omega = \dot{\phi}_i$ де i - номер вихору, при якому вихор не лежить на осі Oz (такий вибір можливий оскільки розглядається система із трьох вихорів). Кутові координати вихорів в даній сферичній системі координат можна знайти використавши наступні співвідношення

$$\begin{aligned} l_{ij}^2 &= 2r^2(1 - \cos \gamma_{ij}), \Rightarrow \\ \cos(\theta_i) &= \frac{\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{M}}{\|\mathbf{x}_i\| \|\mathbf{M}\|} = \frac{\sum_{i=1}^N \Gamma_i r^2 \cos \gamma_{ij}}{r \|\mathbf{M}\|} = \frac{r \Gamma}{\|\mathbf{M}\|} - \frac{C_1 - \Gamma_j \Gamma_k l_{jk}^2}{2r \|\mathbf{M}\| \Gamma_i}, \\ \cos(\phi_i - \phi_j) &= \frac{1 - \cos(\theta_i) \cos(\theta_j) - l_{ij}^2 / (2r^2)}{\sin(\theta_i) \sin(\theta_j)}. \end{aligned} \quad (3.34)$$

де $C_1 = \sum_{i < j} \Gamma_i \Gamma_j l_{ij}^2$ та γ_{ij} - центральний кут між радіус-векторами \mathbf{x}_i та \mathbf{x}_j .

Підставивши (3.34) у рівняння руху (2.22) отримаємо

$$\omega = \frac{\|\mathbf{M}\|}{2\pi r l_{12}^2 l_{31}^2} \frac{A_1}{A_2}, \quad (3.35)$$

де

$$\begin{aligned} A_1 &= l_{12}^2 l_{31}^2 [\Gamma_2^2 (4r^2 - l_{12}^2) + \\ &+ \Gamma_2 \Gamma_3 (4r^2 - l_{12}^2 - l_{31}^2) + \Gamma_3^2 (4r^2 - l_{31}^2)] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +2r^2\Gamma_2\Gamma_3[l_{12}^2(l_{12}^2 - l_{23}^2) + l_{31}^2(l_{31}^2 - l_{23}^2)], \\
A_2 = & (\Gamma_2 l_{12}^2 + \Gamma_3 l_{31}^2)[\Gamma_2(4r^2 - l_{12}^2) + \\
& + \Gamma_3(4r^2 - l_{31}^2)] - 4r^2\Gamma_2\Gamma_3 l_{23}^2. \tag{3.36}
\end{aligned}$$

Оскільки положення відносної рівноваги будуть фіксованими точками рівнянь (2.25), тому маємо, що в положенні рівноваги або $V \neq 0$ та $1/l_{ij}^2 - 1/l_{ik}^2 = 0$, або $V = 0$.

Якщо $V \neq 0$ тоді з (2.25) слідує, що $l_{12} = l_{23} = l_{31} = s$ і з (3.35) прямою підстановкою отримується (3.24). Оскільки $\mathbf{n} \cdot \mathbf{c} = V \neq 0$, у загальному випадку бачимо що \mathbf{n} та \mathbf{c} не перпендикулярні і можуть мати довільний кут між собою. У випадку, коли $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_3$, із (2.31) ми бачимо, що $\dot{\mathbf{n}} = 0$. Тобто $\mathbf{n} = \text{const}$. Оскільки $\mathbf{c} = \text{const}$ та $\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{c} = \text{const}$, то для виконання цих умов \mathbf{x}_i повинен описувати конус навколо обох векторів \mathbf{n} та \mathbf{c} . Це можливо тільки коли вони паралельні. Якщо ж $\Gamma = 0$, то $\mathbf{n} \cdot \mathbf{M} = \Gamma V = 0$, звідки слідує, що \mathbf{n} та \mathbf{M} - перпендикулярні. Частота обертання в буде рівною

$$\omega = \frac{(\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3)^{1/2}}{2\sqrt{2}\pi r s} \tag{3.37}$$

Випадок $V = 0$ описує всі положення відносної рівноваги розташовані на великому колі. Для того щоб дана умова давала положення рівноваги, необхідно, щоб $V(t) = 0$ для довільного t . Очевидно, що $V \equiv 0$, якщо $V(0) = 0$ та $\dot{V}(0) = 0$. Допустимо, що дані умови виконуються. Тоді, як було зазначено вище, в положенні відносної рівноваги вихори обертаються з однаковою кутовою швидкістю навколо вектора $\mathbf{c} = \Gamma \mathbf{M}$. Тому швидкості вихорів напрямлені вздовж векторів $\mathbf{M} \times \mathbf{x}_i, i = 1, \dots, 3$, тобто

$$\dot{\mathbf{x}}_i = \omega \mathbf{e}_z \times \mathbf{r}_i = \omega_i \mathbf{M} \times \mathbf{x}_i, \tag{3.38}$$

де $\mathbf{r}_i = \mathbf{x}_i \sin \theta_i$ - вектор нормалі до осі обертання, $\omega_i = \frac{\omega}{\|\mathbf{M}\|} \sin \theta_i \neq 0$. Далі,

користуючись векторною формою рівнянь руху (2.23), отримаємо

$$\omega_i \mathbf{M} \times \mathbf{x}_i = \dot{\mathbf{x}}_i = \frac{1}{2\pi r} \left(\Gamma_j \frac{\mathbf{x}_j \times \mathbf{x}_i}{l_{ij}^2} + \Gamma_k \frac{\mathbf{x}_k \times \mathbf{x}_i}{l_{ik}^2} \right), i \neq j \neq k, i, j, k = 1, \dots, 3. \quad (3.39)$$

Оскільки \mathbf{x}_i не колінеарний до \mathbf{x}_j та \mathbf{x}_k , маємо наступне співвідношення

$$\omega_i (\Gamma_j \mathbf{x}_j + \Gamma_k \mathbf{x}_k) = \frac{1}{2\pi r} \left(\Gamma_j \mathbf{x}_j \frac{1}{l_{ij}^2} + \Gamma_k \mathbf{x}_k \frac{1}{l_{ik}^2} \right), i \neq j \neq k, i, j, k = 1, \dots, 3. \quad (3.40)$$

Виберемо $\mathbf{x}_i = (r, 0, 0)$, $\mathbf{x}_j = (r \cos \gamma_{ij}, r \sin \gamma_{ij}, 0)$, $\mathbf{x}_k = (r \cos \gamma_{ik}, r \sin \gamma_{ik}, 0)$.

Тоді останнє співвідношення перепишеться у вигляді наступних рівнянь

$$\begin{aligned} \omega_i (r\Gamma_j \cos \gamma_{ij} + r\Gamma_k \cos \gamma_{ik}) &= \frac{1}{2\pi r} \left(\frac{r\Gamma_j \cos \gamma_{ij}}{2r^2(1 - \cos \gamma_{ij})} + \frac{r\Gamma_k \cos \gamma_{ik}}{2r^2(1 - \cos \gamma_{ik})} \right), \\ \omega_i (r\Gamma_j \sin \gamma_{ij} + r\Gamma_k \sin \gamma_{ik}) &= \frac{1}{2\pi r} \left(\frac{r\Gamma_j \sin \gamma_{ij}}{2r^2(1 - \cos \gamma_{ij})} + \frac{r\Gamma_k \sin \gamma_{ik}}{2r^2(1 - \cos \gamma_{ik})} \right), \\ &0 = 0. \end{aligned}$$

Розв'язавши перше та друге рівняння відносно ω_i та прирівнявши отримані розв'язки, отримаємо

$$\begin{aligned} &(\Gamma_j \sin \gamma_{ij} + \Gamma_k \sin \gamma_{ik}) \left(\frac{\Gamma_j \cos \gamma_{ij}}{1 - \cos \gamma_{ij}} + \frac{\Gamma_k \cos \gamma_{ik}}{1 - \cos \gamma_{ik}} \right) = \\ &= (\Gamma_j \cos \gamma_{ij} + \Gamma_k \cos \gamma_{ik}) \left(\frac{\Gamma_j \sin \gamma_{ij}}{1 - \cos \gamma_{ij}} + \frac{\Gamma_k \sin \gamma_{ik}}{1 - \cos \gamma_{ik}} \right), \Leftrightarrow \\ &\frac{\Gamma_j \Gamma_k \sin \gamma_{ik} \cos \gamma_{ij}}{1 - \cos \gamma_{ij}} + \frac{\Gamma_j \Gamma_k \cos \gamma_{ik} \sin \gamma_{ij}}{1 - \cos \gamma_{ik}} = \\ &= \frac{\Gamma_j \Gamma_k \cos \gamma_{ik} \sin \gamma_{ij}}{1 - \cos \gamma_{ij}} + \frac{\Gamma_j \Gamma_k \sin \gamma_{ik} \cos \gamma_{ij}}{1 - \cos \gamma_{ik}}, \Leftrightarrow \\ &\frac{\sin(\gamma_{ij} - \gamma_{ik})}{1 - \cos \gamma_{ij}} - \frac{\sin(\gamma_{ij} - \gamma_{ik})}{1 - \cos \gamma_{ik}} = 0, \Leftrightarrow \\ &\sin \gamma_{jk} \left(\frac{1}{1 - \cos \gamma_{ij}} - \frac{1}{1 - \cos \gamma_{ik}} \right) = 0, \end{aligned}$$

Якщо $\sin \gamma_{jk} = 0$, тоді $\gamma_{jk} = \pi$ та $\gamma_{ij} + \gamma_{ik} = \pi$. З вищенаведених рівнянь отримаємо $\cos \gamma_{ij} = \cos \gamma_{ik} = 0$, тобто $\gamma_{jk} = \pi$, $\gamma_{ij} = \gamma_{ik} = \frac{\pi}{2}$. Відповідна даному розв'язку рівноважна конфігурація має форму рівнобедреного

прямокутного трикутника. Підставивши $l_{12} = l_{13} = \sqrt{2}r$ та $l_{23} = 2r$ у (3.35) отримаємо (3.25). При довільних ненульових інтенсивностях вектор \mathbf{c} буде належати площині трикутника, а тому \mathbf{n} та \mathbf{c} будуть ортогональними.

Якщо ж $\sin \gamma_{jk} \neq 0$, тоді $\cos \gamma_{ij} = \cos \gamma_{ik}$. Єдиним розв'язком даних рівнянь є розв'язок $\gamma_{12} = \gamma_{23} + 2\pi k = \gamma_{13} + 2\pi n$. Він задає конфігурацію у вигляді правильного трикутника. Тобто $l_{12} = l_{23} = l_{31} = s$ і аналогічно попередньому випадку з (3.35) прямою підстановкою отримується (3.24). У даному випадку, коли $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_3$ отримаємо вироджену конфігурацію, яка повністю узгоджується з результатами твердження 3.7. Якщо ж інтенсивності не рівні між собою, тоді вектор \mathbf{c} лежить у площині трикутника, тому перпендикулярний до нормалі \mathbf{n} .

Зазначимо, що з (2.30) безпосередньою перевіркою отримаємо, що знайдені конфігурації тотожно задовольняють співвідношенням $V = 0$ та $\dot{V} = 0$ (тобто дані умови ніяких обмежень на інтенсивності не накладають). Тому, єдино можливими не виродженими конфігураціями відносної рівноваги на великому колі є правильний та рівнобедрений прямокутний трикутники з довільними інтенсивностями.

3.4. Положення відносної рівноваги чотирьох вихорів

Опис можливих положень рівноваги чотирьох вихорів міститься у наступному твердженні

3.9. *Положення відносної рівноваги чотирьох точкових вихорів на сфері можна поділити на три категорії:*

1. *Вихори знаходяться на великому колі і виконуються співвідношення:*

$$\begin{aligned} V_{ijk} &= 0, \\ \dot{V}_{ijk} &= 0, \end{aligned} \tag{3.41}$$

де $(i, j, k) \in \{(1, 2, 3), (1, 2, 4), (1, 3, 4), (2, 3, 4)\}$.

2. Три вихори мають однакову інтенсивність і знаходяться у вершинах правильного трикутника на екваторі. Четвертий вихор має незалежну інтенсивність і знаходиться в одному із полюсів. Конфігурація обертається навколо вектора $\mathbf{c} = \mathbf{e}_z$ з кутовою швидкістю

$$\omega = \frac{\Gamma_4}{2\pi r^2 s_e^2}, \quad (3.42)$$

де $l_{12} = l_{23} = l_{13} = s_e^2$.

3. Жодні три вихори не знаходяться на великому колі. Міжвихреві відстані та інтенсивності задовольняють співвідношенням (3.14).

З геометричних міркувань зрозуміло, що якщо хоча б два V_{ijk} рівні нулю, то чотири радіус вектори будуть компланарні, тобто отримуємо конфігурацію першої категорії. Зрозуміло що, щоб дана конфігурація залишалась положенням рівноваги потрібно вимагати, щоб і похідні \dot{V}_{ijk} були рівні нулеві.

Якщо ж жоден з V_{ijk} не рівний нулеві, користуючись міркуваннями приведеними при доведенні твердження 3.6 отримаємо, що інтенсивності та міжвихреві відстані повинні задовольняти співвідношенням (3.14).

У випадку, коли тільки один V_{ijk} рівний нулеві, не обмежуючи загальності покладемо $V_{123} = 0$. Тоді система (3.19) перетвориться на

$$\begin{cases} \Gamma_4 V_{124} \left(\frac{1}{l_{24}^2} - \frac{1}{l_{14}^2} \right) = 0, \\ \Gamma_4 V_{134} \left(\frac{1}{l_{34}^2} - \frac{1}{l_{14}^2} \right) = 0, \\ \Gamma_2 V_{142} \left(\frac{1}{l_{24}^2} - \frac{1}{l_{12}^2} \right) + \Gamma_3 V_{143} \left(\frac{1}{l_{34}^2} - \frac{1}{l_{13}^2} \right) = 0, \\ \Gamma_4 V_{234} \left(\frac{1}{l_{34}^2} - \frac{1}{l_{24}^2} \right) = 0, \\ \Gamma_1 V_{241} \left(\frac{1}{l_{14}^2} - \frac{1}{l_{12}^2} \right) + \Gamma_3 V_{243} \left(\frac{1}{l_{34}^2} - \frac{1}{l_{23}^2} \right) = 0, \\ \Gamma_1 V_{341} \left(\frac{1}{l_{14}^2} - \frac{1}{l_{13}^2} \right) + \Gamma_2 V_{342} \left(\frac{1}{l_{24}^2} - \frac{1}{l_{23}^2} \right) = 0, \end{cases}$$

Оскільки для конфігурації з чотирьох вихорів $\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3\Gamma_4 \neq 0$, тому маємо

$$l_{14}^2 = l_{24}^2 = l_{34}^2 = s_e,$$

Єдиною геометрично можливою конфігурацією з трьома рівновіддаленими вихорами на екваторіальній площині є піраміда з правильним трикутником в основі. Тому маємо $V_{124} = V_{134} = V_{234}$ і з вищенаведеної системи отримуємо

$$\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_3 = \Gamma_e.$$

З означення вектора \mathbf{c} отримаємо

$$\mathbf{c} = \sum_{i=1}^4 \Gamma_i \mathbf{x}_i = \Gamma_4 \mathbf{x}_4 = \frac{\Gamma_4}{r} \mathbf{e}_z.$$

Щоб знайти кутову швидкість обертання, запишемо рівнянні руху для першого вихору

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = \frac{1}{2\pi r} \left[\frac{\Gamma_2 \mathbf{x}_2 \times \mathbf{x}_1}{l_{12}^2} + \frac{\Gamma_3 \mathbf{x}_3 \times \mathbf{x}_1}{l_{13}^2} + \frac{\Gamma_4 \mathbf{x}_4 \times \mathbf{x}_1}{l_{14}^2} \right] = \frac{\Gamma_4}{2\pi r^2 s_e^2} \mathbf{e}_z \times \mathbf{x}_1.$$

Тому $\omega = \frac{\Gamma_4}{2\pi r^2 s_e^2}$, що й доводить твердження 3.9.

3.5. Положення рівноваги N вихорів.

Узагальнимо метод, частково використаний при описі вищенаведених положень рівноваги, на випадок N точкових вихорів.

Положення абсолютної та відносної рівноваги у задачі про рух N точкових вихорів знайдемо як положення рівноваги системи (2.25), тобто поклавши

$$\frac{dl_{ij}^2}{dt} = 0. \quad (3.43)$$

Тоді з (2.25) отримаємо наступні рівняння

$$\sum_{k=1, k \neq i, k \neq j}^N \frac{\Gamma_k V_{ijk}}{\pi} \left(\frac{1}{l_{jk}^2} - \frac{1}{l_{ik}^2} \right) = 0. \quad (3.44)$$

Перепишемо ці рівняння у матричній формі

$$\mathbf{A}\mathbf{\Gamma} = 0. \quad (3.45)$$

де \mathbf{A} - $\frac{N(N-1)}{2} \times N$ матриця з елементами $A_{lk} = \frac{V_{ijk}}{\pi} \left(\frac{1}{l_{jk}^2} - \frac{1}{l_{ik}^2} \right)$, $l = i + j$, $i, j, k = 1, \dots, N$ і $\mathbf{\Gamma} = (\Gamma_1, \dots, \Gamma_N)$ - вектор інтенсивностей вихорів.

При заданих інтенсивностях $\mathbf{\Gamma}$, задача знаходження положень рівноваги у даному формулюванні є досить складною задачею, адже для того щоб її розв'язати потрібно знайти всі такі матриці \mathbf{A} в ядрі яких знаходиться наперед заданий вектор $\mathbf{\Gamma}$. Потім потрібно визначити які серед знайдених матриць містять в собі структуру задану співвідношенням (3.44). І після цього потрібно розв'язати нелінійну систему рівнянь відносно l_{ij} .

Але якщо поглянути на дану задачу з іншої сторони, тобто при заданій матриці \mathbf{A} знайти всі можливі інтенсивності $\mathbf{\Gamma}$ при яких система (2.25) знаходиться у рівновазі, ми отримаємо досить просту задачу опису ядра лінійного оператора заданого матрицею \mathbf{A} . Проведемо стислий огляд знайдених положень рівноваги ¹:

Тетраедр (N=4).

У випадку коли вихори знаходять у вершинах тетраедра, отримаємо що всі l_{ij} рівні між собою, а тому всі елементи матриці \mathbf{A} рівні 0. Така вироджена матриця має ядро розмірності $\text{nullity}(\mathbf{A}) = N = 4$, тобто його базис можна вибрати у вигляді $(1, 0, 0, 0)$, $(0, 1, 0, 0)$, $(0, 0, 1, 0)$, $(0, 0, 0, 1)$. Це означає, що довільний набір інтенсивностей $(\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4)$ буде знаходитись у ядрі, тобто буде положенням рівноваги. Іншими словами, якщо у початковий момент вихори довільної інтенсивності знаходились у вершинах тетраедра, вони будуть залишатися у вершинах тетраедра. Цей результат продемонстровано на Рис.3.1.

Октаедр (N=6).

У випадку коли вихори знаходять у вершинах октаедра, отримаємо, що

¹Більшість з наведених положень рівноваги були приведені у роботі [21].

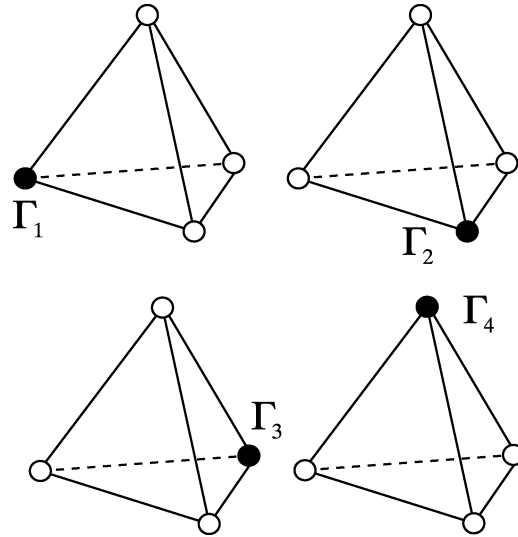


Рис. 3.1. Набір незалежних інтенсивностей, які формують положення рівноваги у формі тетраедра.

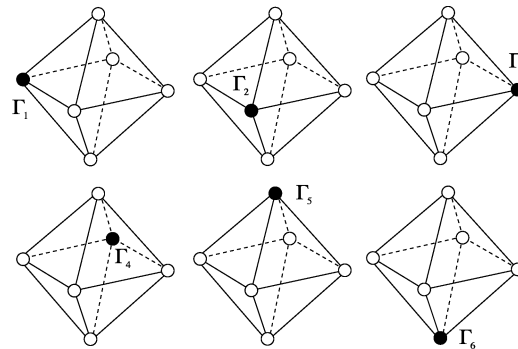


Рис. 3.2. Набір незалежних інтенсивностей, які формують положення рівноваги у формі октаедра.

або відстань між кожними трьома вихорами рівна, або вони знаходяться в одній площині. Тому всі елементи матриці \mathbf{A} також рівні 0. Міркування, аналогічні тим що приведені у випадку тетраедра, приводять до висновку, що якщо у початковий момент вихори довільної інтенсивності знаходились у вершинах октаедра, вони будуть залишатися у вершинах октаедра (Рис. 3.2).

Куб ($N=8$).

У випадку куба, матриця \mathbf{A} вже не буде виродженою. Ми отримаємо, що розмірність ядра \mathbf{A} рівна $\text{nullity}(\mathbf{A}) = 5$. Базис ядра можна вибрати у

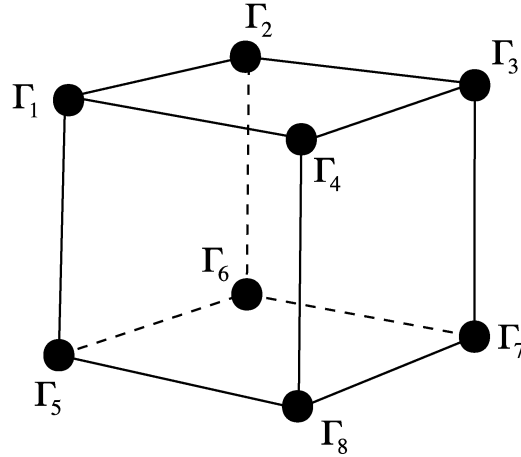


Рис. 3.3. Нумерація вершин куба.

вигляді

$$\begin{aligned}
 \ker(\mathbf{A}) = \text{span}((1, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 0), \\
 (0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, -1), \\
 (0, 0, 1, 0, -1, 0, 0, 0), \\
 (0, 0, 0, 1, 0, -1, 0, 0), \\
 (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1))
 \end{aligned} \tag{3.46}$$

Нумерацію вершин та вигляд базису зображено на Рис. 3.3 та Рис. 3.4 .

Антисиметричний куб ($N=8$).

У випадку антисиметричного куба (куб у якого нижня грань повернута на $\frac{\pi}{4}$), матриця \mathbf{A} також буде невиродженою. Розмірність ядра \mathbf{A} рівна $\text{nullity}(\mathbf{A}) = 1$. Базис ядра можна вибрати у вигляді $(1, 1, 1, 1, -1, -1, -1, -1)$, де перші чотири координати описують інтенсивності вихорів у вершинах верхньої грані, а останні чотири, інтенсивності вихорів у вершинах нижньої(поверненої) грані. Графічна демонстрація даного базису зображена на Рис. 3.5. Як видно з рисунка, ми маємо класичну конфігурацію вихорів фон Кармана. Відзначимо, що конфігурації фон Кармана будуть положеннями рівноваги не тільки у випадку антисиметричного куба.

Ікосаедр ($N=12$).

У випадку ікосаедра, ми також маємо невироджену матрицю \mathbf{A} . Роз-

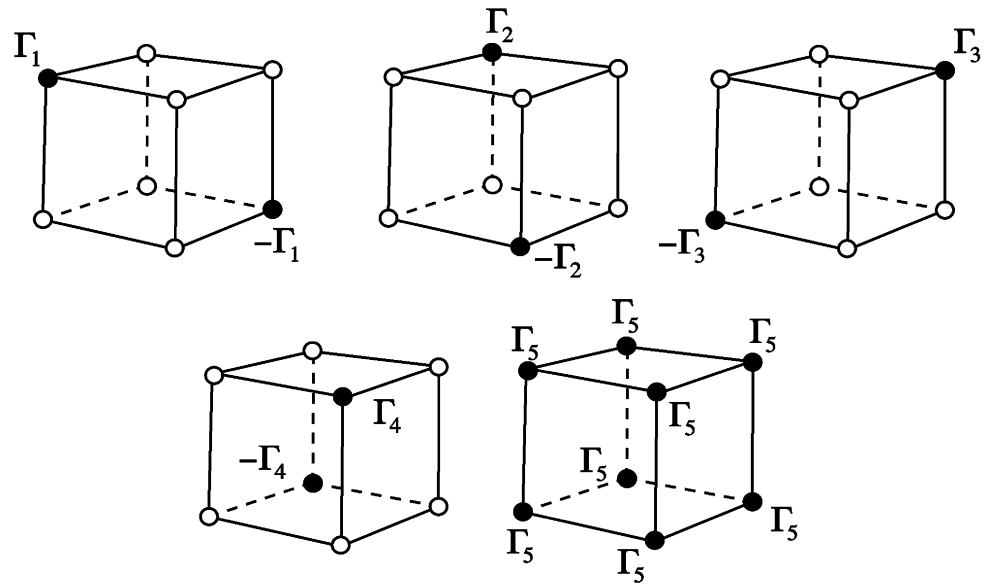


Рис. 3.4. набір незалежних інтенсивностей, які формують положення рівноваги у формі куба.

мірність ядра: $\text{nullity}(\mathbf{A}) = 7$. Базис можна записати у вигляді:

$$\begin{aligned}
 \ker(\mathbf{A}) = \text{span}(& (1, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0), \\
 & (0, 1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0), \\
 & (0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 0), \\
 & (0, 0, 0, 0, 0, 1, -1, 0, 0, 0, 0, 0), \\
 & (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, -1), \\
 & (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, -1, 0), \\
 & (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1))
 \end{aligned} \tag{3.47}$$

Нумерацію вершин приведено на Рис. 3.6. Графічне представлення базису зображено на Рис. 3.7.

Додекаедр ($N=20$).

У випадку коли вихори знаходяться у вершинах додекаедра, ми отримаємо невироджену матрицю \mathbf{A} розмірність ядра якої $\text{nullity}(\mathbf{A}) = 4$. Нуме-

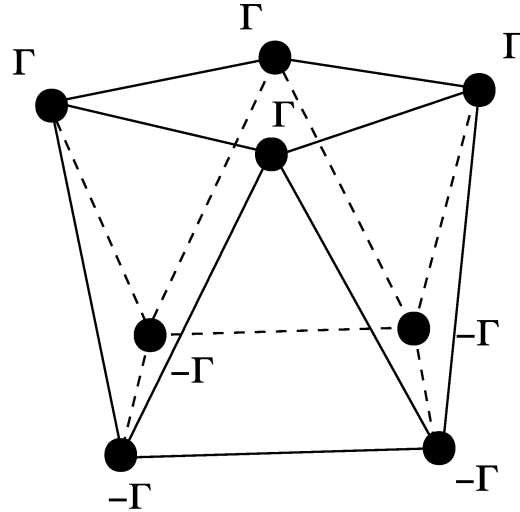


Рис. 3.5. Єдиний набір інтенсивностей, які формують положення рівноваги у формі антисиметричного куба.

рацію вершин приведено на Рис. 3.8. Базис ядра можна записати у вигляді:

$$\begin{aligned} \ker(\mathbf{A}) = \\ \text{span}((-b, -b, -b, -b, -b, b+1, b+1, b+1, b+1, b+1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1), \\ (1, b-1, 1, b, b, b-1, 0, b-1, b, b, 1, b, 1, 0, 0, b-1, 1, b-1, 0, 0), \\ (0, 0, -1, -b, -1, b-1, b-1, -1, -2, -1-b, -b, 0, 1, 0, -1, -1, 0, b-1, 0), \\ (b, 2, b+1, b+1, 2, 2-b, 1, 2, 2, 1, b, 1, 0, 0, 1, 2-b, 0, -b+1, -b+1, 0)), \end{aligned} \quad (3.48)$$

де $b = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Кубооктаедр (N=12).

Кубооктаедр - це вписаний багатогранник, який зображено на Рис. 3.9. Він є одним із так званих напівправильних багатогранників, або як їх часто називають - Архімедових тіл. У випадку коли вихори знаходять у вершинах кубооктаедра, ми отримаємо невироджену матрицю \mathbf{A} розмірність ядра якої $\text{nullity}(\mathbf{A}) = 1$. Базис ядра описується одним вектором, всі елементи якого рівні 1, тобто кубооктаедр буде положенням рівноваги тільки у випадку, коли інтенсивності всіх вихорів однакові.

Ікосододекаедр (N=30).

Ікосододекаедр - це ще один напівправильний випуклий вписаний бага-

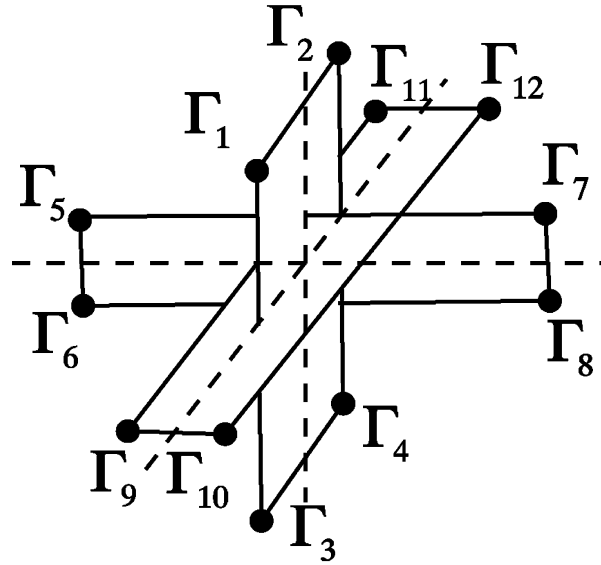


Рис. 3.6. Нумерація вершин ікосаедра.

тогранник, який зображено на Рис. 3.10. У випадку коли вихори знаходяться у вершинах ікосододекаедра, ми отримаємо випадок аналогічний попередньому, тобто невироджену матрицю \mathbf{A} розмірність ядра якої $\text{nullity}(\mathbf{A}) = 1$. Базис ядра описується одним вектором, всі елементи якого рівні 1, тобто ікосододекаедр буде положенням рівноваги тільки у випадку, коли інтенсивності всіх вихорів однакові.

Зауваження 3.4. Зазначимо, що з існуючих 13 Архімедових тіл, тільки 2 наведених вище напівправильних багатогранники є положеннями рівноваги.

Згідно з [33] кільцеві положення відносної рівноваги допускають розміщення вихорів в полюсах без порушення рівноваги. Це дозволяє побудувати наступні положення рівноваги.

Куб з полюсами ($N=10$).

Матриця \mathbf{A} не вироджена. Розмірність ядра \mathbf{A} рівна $\text{nullity}(\mathbf{A}) = 3$. Базис ядра можна вибрати у вигляді

$$\begin{aligned} \ker(\mathbf{A}) = \text{span}((1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0), \\ (0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0), \\ (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, -1)) \end{aligned} \quad (3.49)$$

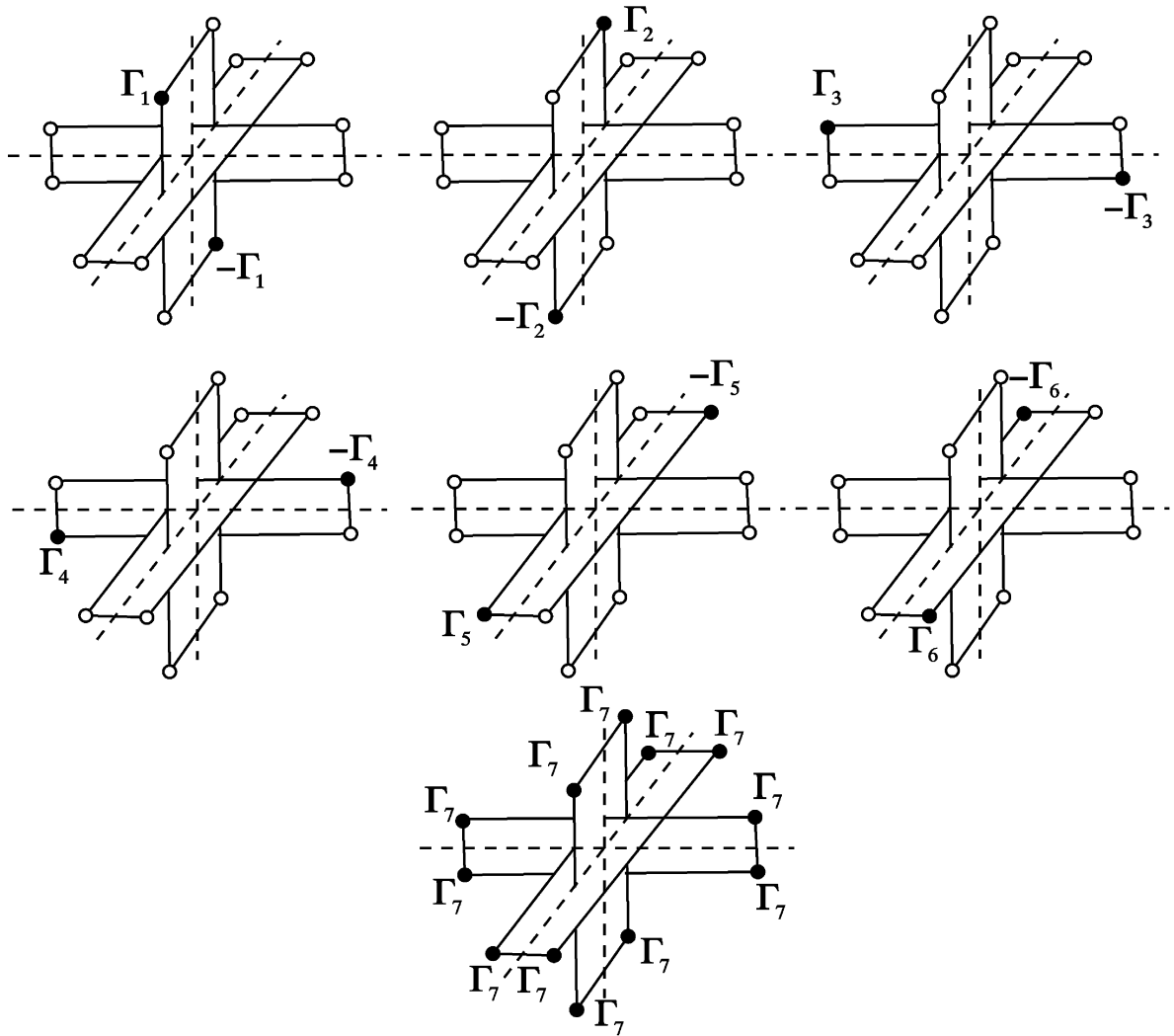


Рис. 3.7. Набір незалежних інтенсивностей, які формують положення рівноваги у формі ікосаедра.

Графічне зображення базису приведено на Рис. 3.11 .

Антисиметричний куб з полюсами ($N=10$).

У випадку антисиметричного куба з полюсами матриця \mathbf{A} також буде невиродженою. Розмірність ядра \mathbf{A} рівна $\text{nullity}(\mathbf{A}) = 3$. Базис ядра можна вибрати у вигляді

$$\begin{aligned} \ker(\mathbf{A}) = \text{span}((1, 1, 1, 1, -1, -1, -1, -1, 0, 0), \\ (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0), \\ (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)) \end{aligned} \quad (3.50)$$

Даний базис відповідає оригінальній конфігурації у формі антисиметри-

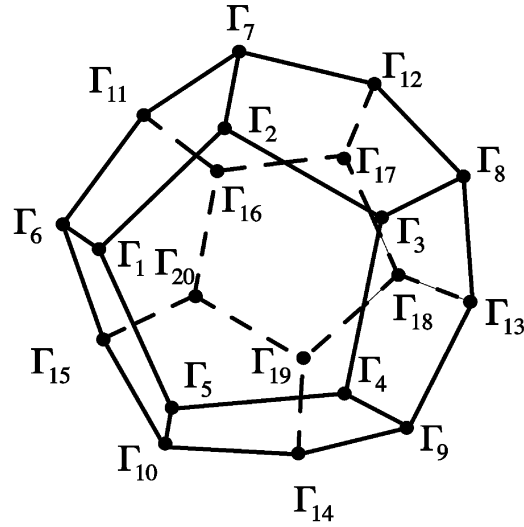


Рис. 3.8. Положення рівноваги у формі додекаедра.

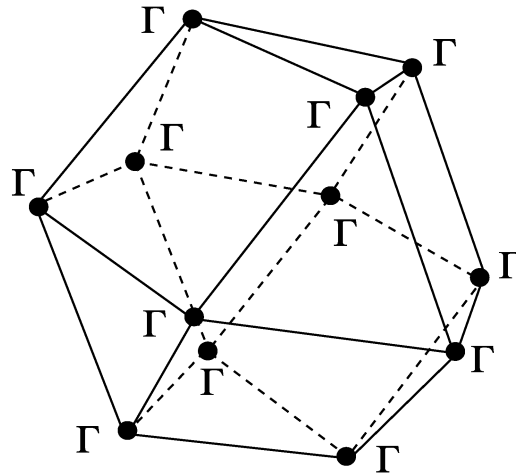


Рис. 3.9. Положення рівноваги у формі кубооктаедра.

чного куба з вихорами незалежних інтенсивностей у полюсах.

Додекаедр з полюсами ($N=22$).

У випадку коли вихори знаходяться у вершинах додекаедра, ми отримуємо невироджену матрицю \mathbf{A} розмірність ядра якої $\text{nullity}(\mathbf{A}) = 3$. Нумерацію вершин приведено на Рис. 3.12. Базис ядра можна записати у

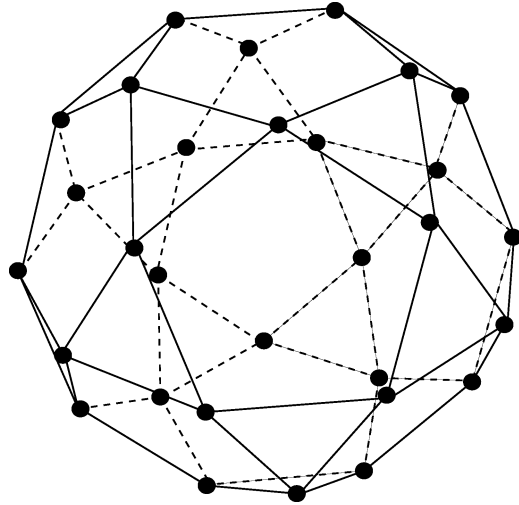


Рис. 3.10. Положення рівноваги у формі ікосододекаедра.

вигляді:

$$\begin{aligned} \ker(\mathbf{A}) = \\ \text{span}((b+1, b+1, b+1, b+1, b+1, b, b, b, b, b, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0), \\ (b, b, b, b, b, b-1, b-1, b-1, b-1, b-1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0), \\ (0, 1, -1)), \end{aligned} \quad (3.51)$$

де $b = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Кубооктаедр з полюсами ($N=14$).

Матриця \mathbf{A} невироджена. Розмірність ядра $\text{nullity}(\mathbf{A}) = 3$. Базис ядра описується трьома векторами:

$$\begin{aligned} \ker(\mathbf{A}) = \text{span}((1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0), \\ (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0), \\ (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)) \end{aligned} \quad (3.52)$$

Даний базис відповідає оригінальній конфігурації у формі кубооктаедра з вихорами незалежних інтенсивностей у полюсах. Графічне зображення базису приведено на Рис. 3.13.

Зауваження 3.5. В положеннях відносної рівноваги у формі ікосаедра та ікосододекаедра вихори в точках, які відповідають центрам граней, ма-

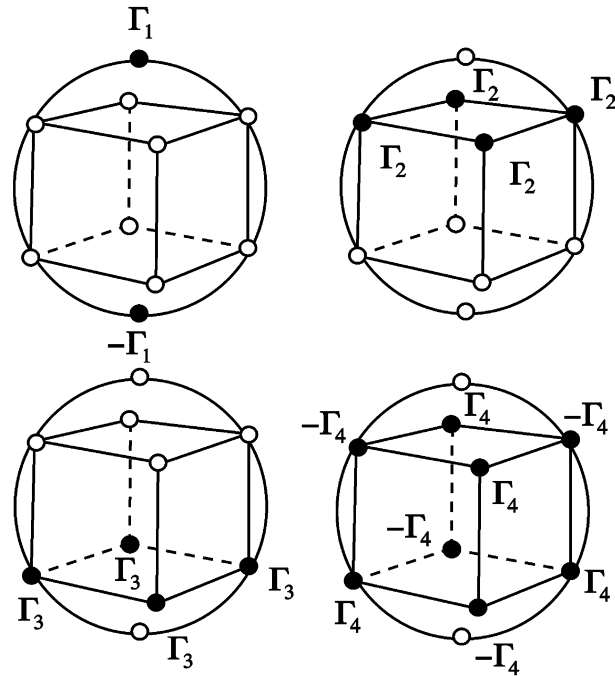


Рис. 3.11. набір інтенсивностей, які формують положення рівноваги у формі куба з полюсами.

ють інтенсивність рівну 0, тобто вони є точками стагнації (мають нульову швидкість).

Зауваження 3.6. Полюси вибирались таким чином, щоб зберегти максимальну симетрію в системі, тобто у точках, які відповідають протилежним центрам граней.

Відмітимо також, що на базі приведенного у даному параграфі методу

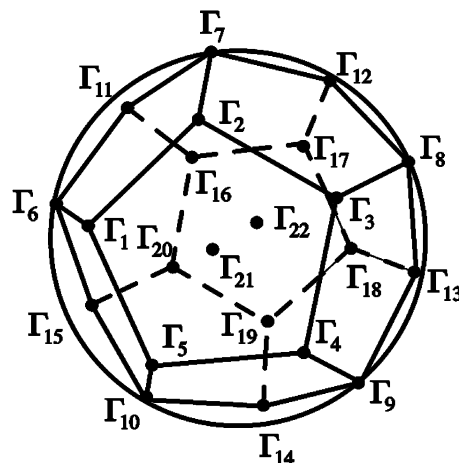


Рис. 3.12. Положення рівноваги у формі додекаедра з полюсами.

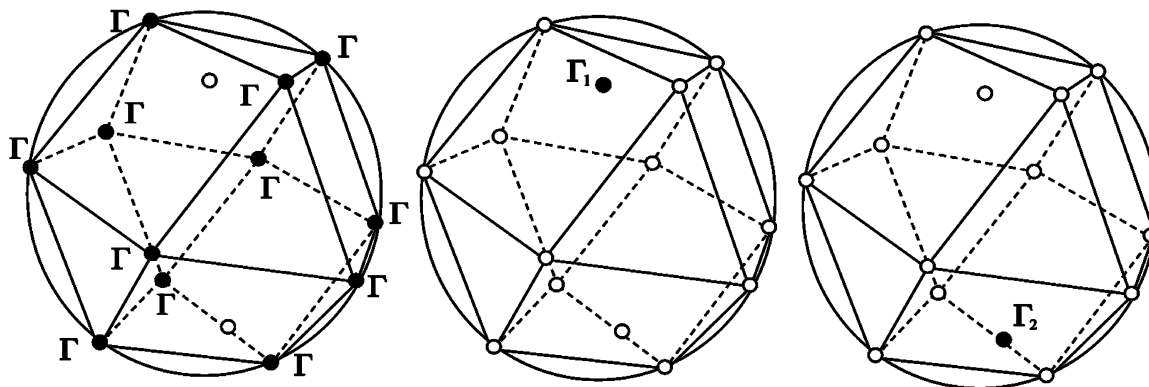


Рис. 3.13. Положення рівноваги у формі кубооктаедра з полюсами.

можна побудувати чисельний алгоритм для знаходження несиметричних положень рівноваги [37].

Висновки до розділу 3

В даному розділі:

1. Знайдено і класифіковано положення фіксованої та відносної рівноваги для трьох та чотирьох точкових вихорів.
2. Продемонстровано метод перевірки заданої конфігурації на можливість отримання положення рівноваги.
3. Приведено правильні та напівправильні багатогранники які є положеннями рівноваги, разом з можливими наборами інтенсивностей.
4. Знайдено нові положення рівноваги у вигляді суперпозиції правильних та напівправильних багатогранників та пари вихорів на полюсах.

Новими результатами даного розділу є:

- класифікація положень рівноваги у випадку чотирьох вихорів;
- побудова положень рівноваги у вигляді суперпозиції;
- нові положення рівноваги у вигляді напівправильних багатогранників:
- нові положення рівноваги у вигляді суперпозиції правильних багатогранників з парою діаметрально протилежних вихорів.

РОЗДІЛ 4

СТІЙКІСТЬ ТОЧКОВИХ ВИХОРИВ НА СФЕРІ

В розділі приведено загальний метод дослідження стійкості гамільтонових систем з симетріями. Розвинено два підходи: векторний, який не має особливостей і зручний для застосування в загальному випадку та координатний (в даному розділі використовуються циліндричні координати, оскільки вони є канонічними змінними), який допускає значні спрощення у випадку осьової симетрії, проте має особливості на полюсах. Щоб усунути особливості на полюсах в координатному методі, вводиться змішана система координат.

Для отримання конкретних результатів щодо стійкості конфігурацій, необхідно знання координат вихорів в положенні рівноваги (можливо як функцій інтенсивностей вихорів). Єдиним загальним випадком коли це можливо – є випадок трьох точкових вихорів (як показано у попередньому розділі для чотирьох точкових вихорів можливо привести лише набір нелінійних рівнянь, розв'язками яких є положення рівноваги). Оскільки в загальному випадку рівноважні конфігурації точкових вихорів не містять обертових симетрій, найбільш ефективним є використання векторного методу для дослідження стійкості.

У випадку наявності додаткових симетрій в конфігурації, а саме обертових, дослідження стійкості спрощується за допомогою використання циліндричних та змішаних координат. За допомогою координатного методу можна отримати результати по стійкості частинних випадків рівноважних конфігурацій чотирьох точкових вихорів (тетраedr і правильна трикутна піраміда) та правильних і напівправильних багатогранників.

4.1. Метод енергії-моменту

В даному параграфі проведемо стислий опис методу енергії-моменту. Виклад матеріалу частково слідує [42].

Розглянемо абстрактну механічну систему з конфігураційним простором Q (простір можливих положень) та канонічним фазовим простором, який співпадає з кодотичним розшаруванням $P = T^*Q$ (простір положень та імпульсів). Фазовий простір містить симплектичну структуру породжену канонічною симплектичною 2-формою Ω .

Допустимо, що розглядувана механічна система є гамільтоною з Гамільтоніаном $H : P \rightarrow \mathbb{R}$. Як відомо H - являє собою повну енергію системи. Нехай $X_H : P \rightarrow TP$ - Гамільтонове векторне поле пов'язане з H , тобто

$$DH(\mathbf{x}) \cdot \delta\mathbf{x} = \Omega(\mathbf{x})(X_H, \delta\mathbf{x}), \forall \mathbf{x} \in P, \delta\mathbf{x} \in T_{\mathbf{x}}P. \quad (4.1)$$

Якщо $F_t : [0, T] \times P \rightarrow P$ позначає потік поля X_H , тоді гамільтонові рівняння приймають наступний вигляд

$$\frac{d}{dt}F_t(\mathbf{x}) = X(F_t(\mathbf{x})). \quad (4.2)$$

Допустимо, що Гамільтонова система допускає симетрії породжені групою G з Лі алгеброю \mathfrak{g} , яка діє на P за допомогою канонічних перетворень (зауважимо, що дія називається канонічною, якщо вона зберігає пуассонову структуру і в даному випадку вона породжена симплектичною формою). Позначимо через $\Psi_g : P \rightarrow P$ дію групи G на P для кожного $g \in G$. Тобто ми допускаємо, що

$$H(\Psi_g(\mathbf{x})) = H(\mathbf{x}), \forall g \in G. \quad (4.3)$$

Нехай q позначає елемент простору P та $p \in T_q^*Q$ відповідний імпульс. T_qQ дотичний простір в q , T_q^*Q відповідний спряження простір, пов'язаний через невіджене спряження, яке позначимо через $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Ототожнимо

$(q, p) \in Q \times T_q^*Q$ з $\mathbf{x} \in T^*Q$. Будемо розглядати системи, для яких симплектична дія $\Psi_q : P \rightarrow P$ є наведеною дією $(g, q) \rightarrow g \cdot q$ групи G на Q , для $(q, p) \in G \times Q$ (детальні означення містяться у [2]). Кожній дії групи G на Q можна поставити у відповідність нескінченно малий генератор ξ_Q , який можна означити звичайним чином

$$\xi_Q(q) = \frac{d}{dt}(\exp[\epsilon\xi] \cdot q)_{\epsilon=0}, \quad (\xi, q) \in \mathfrak{g} \times Q. \quad (4.4)$$

Позначимо через

$$\mathfrak{g} \cdot q = \{\xi_Q(q) | \xi \in \mathfrak{g}\} \subset T_qQ, \quad (4.5)$$

дотичний простір до орбіти групи $G \cdot q$. Допустимо, що G діє вільно на Q , тоді $G \cdot q \cong G$. Це означає, що $\xi_Q(q) = 0$ тоді і тільки тоді, коли $\xi = 0$.

Позначимо через \mathfrak{g}^* спряжений простір до \mathfrak{g} , $\mathcal{F}(P) = \{f | f : P \rightarrow \mathbb{R}\}$. Згідно з теоремою Емі Нетер існує лінійне на симплектичних листах відображення $J : \mathfrak{g} \rightarrow \mathcal{F}(P)$ таке, що

$$X_{J(\xi)} = \xi_P, \forall \xi \in \mathfrak{g}, \quad (4.6)$$

Відображення $\mathbf{J} : P \rightarrow \mathfrak{g}^*$

$$J(\xi)(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{J}(\mathbf{x}), \xi \rangle \quad (4.7)$$

будемо називати відображенням моменту. Деякі важливі властивості відображення моменту [2, 52]:

1. Для наведених дій, відображення моменту можна знайти за формулою

$$\mathbf{J} \cdot \xi = \langle p, \xi_Q(q) \rangle, \forall \xi \in \mathfrak{g}, \quad (4.8)$$

де точка представляє операцію спряження між \mathfrak{g} та \mathfrak{g}^* .

2. Відображення моменту пов'язане з наведеною дією на кодотичному розшаруванні є еквіваріантним в наступному розумінні. Група G діє

на \mathfrak{g}^* за допомогою копрієднаної дії $\text{Ad}^* : G \times \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{g}^*$ з нескінченно малим генератором, який позначеним через $\text{ad}^* : \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{g}^*$. Еквіваріантність значить, що

$$\mathbf{J}(\Psi_g(\mathbf{x})) = \text{Ad}_{g^{-1}}^*(\mathbf{J}(\mathbf{x})), \forall g \in G. \quad (4.9)$$

3. Для довільного елемента Лі алгебри $\xi \in \mathfrak{g}$ нескінченно малий генератор $\xi_P : P \rightarrow TP$ дії групи G є Гамільтоновим векторним полем з гамільтоніаном $J_\xi : P \rightarrow \mathbb{R}$, який можна визначити за допомогою відображення моменту

$$J_\xi(\mathbf{x}) = \mathbf{J}(\mathbf{x}) \cdot \xi. \quad (4.10)$$

Тому, з (4.1), отримаємо

$$DJ_\xi(\mathbf{x}) \cdot \delta\mathbf{x} = \Omega(\mathbf{x})(\xi_Q(\mathbf{x}), \delta\mathbf{x}). \quad (4.11)$$

Означимо положення відносної рівноваги, використавши підхід запропонований А. Пуанкаре. Точка $\mathbf{x}_e \in P$ є положенням відносної рівноваги Гамільтонової системи з групою симетрій G , якщо траєкторії Гамільтонових рівнянь через точку \mathbf{x}_e можна записати у вигляді

$$F_t(\mathbf{x}) = \Psi_{\exp[t\xi_e]}(\mathbf{x}_e), \quad (4.12)$$

для деякого $\xi_e \in \mathfrak{g}$. Іншими словами, динамічна орбіта через точку \mathbf{x}_e співпадає з орбітою через точку \mathbf{x}_e однопараметричної підгрупи $\exp[t\xi_e]$. Продиференціювавши (4.12) по часу, використавши Гамільтонові рівняння (4.2) та означення нескінченно малого генератора (4.4), отримаємо

$$X_H(\mathbf{x}_e) = (\xi_e)_P(\mathbf{x}_e). \quad (4.13)$$

Для знаходження положень відносної рівноваги Гамільтонової системи з симетрією, можна скористатись наступною теоремою [2, 52]

Теорема 4.1. $\mathbf{x}_e \in P$ є положенням відносної рівноваги механічної системи з гамільтоніаном H та відображенням моменту \mathbf{J} для симплектичної дії Лі групи G на фазовому просторі $P = T^*Q$ тоді і тільки тоді, коли існує $\xi_e \in \mathfrak{g}$ таке, що (\mathbf{x}_e, ξ_e) є критичною точкою функціоналу енергії-моменту $H_{\mu_e} : P \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$H_{\mu_e}(\mathbf{x}, \xi) = H(\mathbf{x}) - (\mathbf{J}(\mathbf{x}) - \mu_e) \cdot \xi, \quad (4.14)$$

де $\mu_e = \mathbf{J}(\mathbf{x}_e)$ значення відображення моменту в точці \mathbf{x}_e .

Тобто положення відносної рівноваги є критичними точками гамільтоніана H звуженого на поверхню рівня $\mathbf{J}^{-1}(\mu_e) \subset P$. Функціонал енергії-моменту H_{μ_e} в теоремі 4.1 можна розглядати як функцію Лагранжа, в розумінні теорії оптимізації. В даному випадку досліджуваною на екстремум функцією є $H(\mathbf{x})$. Обмеження для системи виражені рівностями $\mathbf{J}(\mathbf{x}) - \mu_e = 0$, а ξ є множником Лагранжа. Зазначимо, що визначення ξ_e є частиною процесу оптимізації (знаходження екстремуму).

Згідно з методом множників Лагранжа, друга варіація в варіаційній задачі з обмеженнями є знаковизначеною, якщо друга варіація варіаційної задачі без обмежень є знаковизначеною на підпросторі варіацій, які задовольняють лінеаризованим обмеженням. Проте, в даному випадку навіть друга варіація в варіаційній задачі з обмеженнями не є знаковизначеною через інваріантність функціоналу енергії-моменту. Оскільки H є G -інваріантним, нейтральними напрямками $D^2 H_{\mu_e}(\mathbf{x}_e, \xi_e)$ будуть напрямки, які лежать в перетині дотичного до $\mathfrak{g} \cdot \mathbf{x}_e$ простору до орбіти $G \cdot \mathbf{x}_e$ з ядром оператора $T_{\mathbf{x}_e} \mathbf{J}$. Результат отриманий у [34] показує, що даний перетин є

$$\mathfrak{g}_{\mu_e} = \mathfrak{g} \cdot \mathbf{x}_e \cap \ker[T_{\mathbf{x}_e} \mathbf{J}], \quad (4.15)$$

де \mathfrak{g}_{μ_e} – дотичний простір до орбіти $G_{\mu_e} \cdot \mathbf{x}_e$, а G_{μ_e} – група ізотропії μ_e відносно копрієднаної дії, з Лі-алгеброю

$$\mathfrak{g}_{\mu_e} = \{\xi \in \mathfrak{g} \mid \text{ad}_{\xi}^* \mu_e = 0\}. \quad (4.16)$$

Відмітимо, що для довільних $\nu \in \mathfrak{g}$ та $\beta \in \mathfrak{g}_{\mu_e}$

$$\text{ad}_{\nu}^* \mu_e \cdot \beta = \mu_e \cdot [\nu, \beta] = -\mu_e \cdot [\beta, \nu] = -\text{ad}_{\beta}^* \mu_e \cdot \nu = 0. \quad (4.17)$$

Представлення (4.15) слідує з умови (4.9). Дійсно, якщо вибрати $g = \exp[\epsilon \xi]$, для довільного $\xi \in \mathfrak{g}$ і продиференціювати (4.9), то отримаємо

$$\begin{aligned} T_{\mathbf{x}_e} \mathbf{J} \cdot \xi(\mathbf{x}_e) &\equiv \left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} \mathbf{J}(\Psi_{\exp[\epsilon \xi]}(\mathbf{x}_e)) = \\ &= \left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} \text{Ad}_{\exp[-\epsilon \xi]}^*(\mathbf{J}(\mathbf{x}_e)) = \text{ad}_{\xi}^* \mu_e. \end{aligned}$$

Тому, $\xi_P(\mathbf{x}_e) \in \mathfrak{g} \cdot \mathbf{x}_e$ міститься в $\ker[T_{\mathbf{x}_e} \mathbf{J}]$ тоді і тільки тоді, коли $\text{ad}_{\xi}^* \mu_e = 0$, тобто коли $\xi \in \mathfrak{g}_{\mu_e}$, що й доводить (4.15).

Основні властивості інваріантності функціоналу енергії-моменту відносно дії групи G містяться у наступному твердженні [42]:

Твердження 4.2. H_{μ_e} має наступні властивості:

1. Нехай G діє на $P \times \mathfrak{g}$ як $g \cdot (\mathbf{x}, \xi) = (\Psi_g(\mathbf{x}), \text{Ad}_g \xi)$. Тоді H_{μ_e} є інваріантним відносно лівої дії G_{μ_e} .
2. В положенні рівноваги $\mathbf{x}_e \in P$ з множником ξ_e та моментом $\mu_e = \mathbf{J}(\mathbf{x}_e)$ (тобто в критичній точці (\mathbf{x}_e, ξ_e) функціоналу H_{μ_e}) виконується умова

$$\text{ad}_{\xi_e}^* \mu_e = 0, \quad (4.18)$$

тому $\xi_e \in \mathfrak{g}_{\mu_e}$.

3. Нехай G діє на $P \times \mathfrak{g}$ як $g \cdot (\mathbf{x}, \xi) = (\Psi_g(\mathbf{x}), \xi)$. Тоді функціонал $H_{\mu_e}|_{\mathbf{J}^{-1}(\mu_e) \times \mathfrak{g}} \in G_{\mu_e}$ -інваріантним.

Оскільки $H_{\mu_e}|_{\mathbf{J}^{-1}(\mu_e) \times \mathfrak{g}}$ G_{μ_e} -інваріантний, маємо

$$D^2 H_{\mu_e}(\mathbf{x}_e, \xi_e)((\Delta \mathbf{x}, 0), (\delta \mathbf{x}, 0)) = 0$$

для довільних $\Delta \mathbf{x} \in \mathfrak{g}_{\mu_e} \cdot \mathbf{x}_e$ та $\delta \mathbf{x} \in T_{\mathbf{x}_e} \mathbf{J}^{-1}(\mu_e)$. Тому, положення відносної рівноваги не може бути строгим локальним екстремумом функціоналу енергії-моменту, проте воно може бути локальним екстремумом при редуції групи симетрій G_{μ_e} . Даний результат міститься у теоремі [67, 27, 28, 29]:

Теорема 4.3. *Нехай \mathbf{x}_e - положення відносної рівноваги з орбітою $E = \{\exp[\xi_e t] \cdot \mathbf{x}_e, \forall t > 0\}$. E - компактна множина в P . Якщо функціонал енергії-моменту H_{μ_e} досягає свого строгого трансверсального до орбіти E максимуму або мінімуму, в положенні відносної рівноваги \mathbf{x}_e , тоді рух E стійкий за Раусом.*

Для доведення даної теореми, достатньо помітити, що якщо від H_{μ_e} відняти $H_{\mu_e}(\mathbf{x}_e)$ отримаємо функцію Ляпунова для змінних Рауса.

Наведена теорема у більшості випадків допускає спрощення. Для виведення спрощених умов введемо поняття формальної стійкості:

Означення 4.1. Положення рівноваги є формально стійким, якщо

$$D^2 H_{\mu_e}(\mathbf{x}_e, \xi_e)|_{\mathfrak{J}} \quad (4.19)$$

є знаковизначеною. Простір \mathfrak{J} характеризується наступними властивостями:

1. \mathfrak{J} є підпростором дотичного простору до поверхні рівня $\mathbf{J}^{-1}(\mu_e) \subset P$, що еквівалентно $\mathfrak{J} \subset \ker[T_{\mathbf{x}_e} \mathbf{J}]$.
2. Нейтральні напрямки $D^2 H_{\mu_e}(\mathbf{x}_e, \xi_e)$ в $\ker[T_{\mathbf{x}_e} \mathbf{J}]$ зумовлені інваріантністю H_{μ_e} виключені з \mathfrak{J} .

З другої умови означення \mathfrak{J} та представлення (4.15) отримаємо

$$\mathfrak{J} \cong \ker[T_{z_e} \mathbf{J}] / (\mathbf{g}_{\mu_e} \cdot z_e). \quad (4.20)$$

Звідки слідує співвідношення

$$\text{codim}(\mathfrak{J}) = \text{codim}(\ker[T_e \mathbf{J}]) + \dim(\mathbf{g}_{\mu_e}). \quad (4.21)$$

Наступна теорема встановлює зв'язок між формальною стійкістю, орбітальною стійкістю, та стійкістю за Раусом [39]:

Теорема 4.4. *Нехай \mathbf{x}_e є звичайним положенням відносної рівноваги з орбітою $E = \{\exp[\xi_e t] \cdot \mathbf{x}_e, \forall t > 0\}$. Дія групи G_{μ_e} є правильною та для \mathbf{g} існує внутрішній добуток інваріантний відносно приєднаної дії групи G_{μ_e} .*

Тоді E є орбітально стійким та стійким за Раусом, якщо \mathbf{x}_e формально стійке положення відносної рівноваги.

Зазначимо, що положення відносної рівноваги звичайне, якщо

$$\xi_P(\mathbf{x}_e) = \xi \cdot \mathbf{x}_e \neq 0, \forall \xi \in \mathfrak{g}. \quad (4.22)$$

Нагадаємо, що дія групи є правильною, якщо Ψ_g - правильне відображення, тобто прообразом компактної множини є компактна множина.

4.1.1. Метод енергії-моменту у векторній формі. В даному параграфі перейдемо до дослідження стійкості відносних положень рівноваги N точкових вихорів на сфері. Виклад матеріалу частково базується на роботі [40].

Як було вказано в розділі 2 фазовий простір системи складається з N сфер. Природне вкладення в \mathbb{R}^{3N} здійснюється за допомогою накладання обмежень $\|\mathbf{x}_i\| = r$ на радіус-вектори точкових вихорів. Дужка Пуассона (2.33) породжена натуральною симплектичною формою площі на кожній із сфер в фазовому просторі, тому її вкладення в \mathbb{R}^{3N} можна розглядати як суму дужок Лі-Пуассона в $\mathfrak{so}(3)^* \cong \mathbb{R}^3$, тобто

$$\{f, g\} = - \sum_{i=1}^N \frac{r}{\Gamma_i} \mathbf{x}_i \cdot (\nabla_i f \times \nabla_i g). \quad (4.23)$$

де ∇_i - градієнт в i -й копії \mathbb{R}^3 , тобто $\nabla_i f = (f'_{3i+1}, f'_{3i+2}, f'_{3i+3})$.

Оскільки Гамільтоніан інваріантний відносно дії групи $\text{SO}(3)$ то в позначеннях попереднього параграфа, виберемо $G = \text{SO}(3)$. Дію даної групи на P визначимо як обертання в кожній копії \mathbb{R}^3 . Ця дія є канонічною відносно структури (2.33). Відповідна Лі-алгебра натуральним чином ототожнюється з \mathbb{R}^3 з дужкою у вигляді векторного добутку, тобто

$$[\xi, \eta] = \xi \times \eta, \forall \xi, \eta \in \mathfrak{so}(3).$$

Векторне поле, яке є нескінченно малим генератором, для $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{3N}$, $\xi \in \text{so}(3)$. знаходиться як

$$\xi_P(\mathbf{x}) = \left. \frac{d}{dt} \exp(\xi t) \cdot \mathbf{x} \right|_{t=0} = (\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{x}_1, \dots, \boldsymbol{\xi} \times \mathbf{x}_N). \quad (4.24)$$

Згідно з еквівалентним означенням відображення моменту[2]: \mathbf{J} буде відображенням моменту, якщо для довільних $F \in \mathcal{F}(P)$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{3N}$, $\xi \in \text{so}(3)$ виконується наступне співвідношення

$$\{F, \langle \mathbf{J}(\mathbf{x}), \xi \rangle\} = \xi_P[F], \quad (4.25)$$

де $\xi_P[F]$ похідна Лі від функції F та

$$\langle \mathbf{J}(\mathbf{x}), \xi \rangle = \sum_{l=1}^N \langle \mathbf{J}_l(\mathbf{x}), \xi \rangle_d = \sum_{l=1}^N \mathbf{J}_l(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\xi}, \quad (4.26)$$

та \mathbf{J}_l - проекція вектора \mathbf{J} на l -у копію \mathbb{R}^3 , $\langle \cdot, \cdot \rangle_d$ - відношення спряження між елементами $\text{so}(3)$ та $\text{so}(3)^*$ і у випадку, коли дані простори ототожнюються з \mathbb{R}^3 дане відношення буде звичайним скалярним добутком векторів.

Користуючись властивостями векторного добутку, отримаємо

$$\begin{aligned} \{F, \langle \mathbf{J}(\mathbf{x}), \xi \rangle\} &= - \sum_{i=1}^N \frac{r}{\Gamma_i} \mathbf{x}_i \cdot (\nabla_i F \times \nabla_i \langle \mathbf{J}(\mathbf{x}), \xi \rangle) = \\ &= - \sum_{i=1}^N \frac{r}{\Gamma_i} \nabla_i F \cdot (\nabla_i \langle \mathbf{J}(\mathbf{x}), \xi \rangle \times \mathbf{x}_i) = \\ &= \sum_{i=1}^N \nabla_i F \cdot \left(\nabla_i \left(\sum_{l=1}^N \frac{-r \mathbf{J}_l(\mathbf{x})}{\Gamma_i} \cdot \boldsymbol{\xi} \right) \times \mathbf{x}_i \right) = \\ &= \sum_{i=1}^N \nabla_i F \cdot (\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{x}_i) = \xi_P[F], \end{aligned}$$

Оскільки дані співвідношення повинні виконуватись для довільних F , \mathbf{x}_i та ξ , тому

$$\nabla_i \left(\sum_{l=1}^N \frac{-r \mathbf{J}_l(\mathbf{x})}{\Gamma_i} \cdot \boldsymbol{\xi} \right) = \boldsymbol{\xi}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (4.27)$$

В проєкціях на осі декартової системи координат

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^N \frac{-r(\mathbf{J}_l(\mathbf{x}))'_{3i+1}}{\Gamma_i} \xi_x &= \xi_x, \\ \sum_{l=1}^N \frac{-r(\mathbf{J}_l(\mathbf{x}))'_{3i+2}}{\Gamma_i} \xi_y &= \xi_y, \\ \sum_{l=1}^N \frac{-r(\mathbf{J}_l(\mathbf{x}))'_{3i+3}}{\Gamma_i} \xi_z &= \xi_z, \\ & i = 1, \dots, N. \end{aligned}$$

Звідки

$$\begin{aligned} \frac{-r(\mathbf{J}_l(\mathbf{x}))'_{3l+1}}{\Gamma_l} = \frac{-r(\mathbf{J}_l(\mathbf{x}))'_{3l+2}}{\Gamma_l} = \frac{-r(\mathbf{J}_l(\mathbf{x}))'_{3l+3}}{\Gamma_l} = 1, \Rightarrow \\ \mathbf{J}_l(\mathbf{x}) = -\frac{1}{r} \Gamma_l \mathbf{x}_l, \end{aligned}$$

Тобто

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) = -\frac{1}{r} \sum_{i=1}^N \Gamma_i \mathbf{x}_i, \quad (4.28)$$

Відображення моменту є еквіваріантним, тобто

$$\text{Ad}_{g^{-1}}^*(\mathbf{J}(\mathbf{x})) = \mathbf{J}(g(\mathbf{x})), \forall g \in \text{SO}(3). \quad (4.29)$$

Звідки слідує, що величина $\|\mathbf{J}\|^2$ інваріантна відносно дії групи $\text{SO}(3)$.

Для дослідження задач стійкості, згідно з наведеною у попередньому параграфі теорією, розглянемо функціонал енергії-моменту (4.14). Для використання варіаційного числення в R^{3N} , за допомогою методу множників Лагранжа врахуємо додаткові умови $\|\mathbf{x}_i\|^2 = r^2$. Використавши Гамільтоніан (2.32) та відображення моменту (4.28) отримаємо

$$\begin{aligned} H_{\mu_e}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N, \boldsymbol{\xi}) &= \frac{1}{4\pi r^2} \sum_{i < j} \Gamma_i \Gamma_j \ln(2(r^2 - \mathbf{x}_i \mathbf{x}_j)) + \\ &+ \frac{1}{r} \sum_{i=1}^N [\Gamma_i (\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\mu}_{e,i}) \cdot \boldsymbol{\xi} + k_i (\|\mathbf{x}_i\|^2 - r^2)], \end{aligned} \quad (4.30)$$

Для знаходження положень відносної рівноваги потрібно покласти першу варіацію даного функціоналу рівну нулеві, тобто

$$\delta H_{\mu_e}(\mathbf{x}, \xi) = 0, \quad (4.31)$$

Отримаємо

$$\begin{aligned} \Gamma_i \xi - \frac{\Gamma_i}{2\pi r^2} \sum_{j=1, j \neq i}^N \Gamma_j \frac{\mathbf{x}_j}{l_{ij}^2} + 2k_i \mathbf{x}_i &= 0, \\ \|\mathbf{x}_i\|^2 &= r^2, \\ \mathbf{x}_i &= \boldsymbol{\mu}_{e,i}, \quad i = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Наведені рівняння описують усі можливі положення відносної рівноваги.

У випадку $\mathbf{J} \neq 0$, оскільки даний вектор залежить лише від координат та сталих інтенсивностей і є інваріантом системи, точкові вихорі будуть обертатись навколо вектора \mathbf{J} . Група симетрій яка описує дане положення відносної рівноваги є групою $G_{\mu_e} = \text{SO}(2)$. Орбітами даної групи будуть кола в площинах перпендикулярних \mathbf{J} . Розмірність Лі-алгебри даної групи рівна 1, тобто $\dim(\text{so}(2)) = 1$. Згідно з п.2 твердження 4.2 маємо, що $\xi = \boldsymbol{\omega} = -\omega \frac{\mathbf{J}}{\|\mathbf{J}\|}$ та $(\mathbf{x}_e \cdot \text{so}(2))_i = \text{span}[(\mathbf{x}_e)_i \times \mathbf{J}]$.

Похідну відображення моменту можна записати у вигляді

$$D\mathbf{J}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = -\frac{1}{r} \sum_{i=1}^N \Gamma_i \mathbf{y}_i, \quad (4.33)$$

де $\mathbf{y} = (\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_N) \in T_{\mathbf{x}}P$. Тому

$$\ker D\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y} \in T_{\mathbf{x}}P \mid \sum_{i=1}^N \Gamma_i \mathbf{y}_i = 0\}. \quad (4.34)$$

Продиференціювавши двічі H_{μ_e} знайдемо другу варіацію функціоналу енергії-моменту

$$D^2 H_{\mu_e} = \frac{\partial^2 H_{\mu_e}}{\partial a_i \partial b_j} = \begin{cases} \frac{2}{r} k_i \delta^{ab} - \frac{\Gamma_i}{\pi r^2} \sum_{k=1, k \neq i}^N \Gamma_k \frac{a_k b_k}{l_{ki}^4}, & i = j, \\ -\frac{\Gamma_i \Gamma_j}{2\pi r^2 l_{ij}^2} \left(\delta^{ab} + 2 \frac{a_j b_i}{l_{ij}^2} \right), & i \neq j. \end{cases} \quad (4.35)$$

де $i, j = 1, \dots, N, a, b \in \{x, y, z\}$, $\delta^{ab} = 1$, коли $a = b$ та $\delta^{ab} = 0$, коли $a \neq b$. Оскільки групи $SO(3)$ та $SO(2)$ компактні, тому всі умови теорем 4.4,4.3 виконуються і визначеність другої варіації функціоналу енергії-моменту дає можливість зробити висновки щодо стійкості досліджуваної системи.

У випадку коли $\mathbf{J} = 0$ групою симетрій яка описує положення рівноваги, буде група $G_{\mu_e} = SO(3)$. Дотичні напрямки до орбіт групи утворюють тривимірний простір, оскільки Лі-алгебра даної групи є тривимірним векторним простором. Якщо ототожнити Лі-алгебру $so(3)$ з простором \mathbb{R}^3 з дужкою у вигляді векторного добутку, тоді простір дотичних до орбіт напрямків можна записати у вигляді

$$\mathfrak{g}_{\mu_e} = \{(\mathbf{x} \times \mathbf{x}_1^e, \mathbf{x} \times \mathbf{x}_2^e, \dots, \mathbf{x} \times \mathbf{x}_N^e) | \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3\}, \quad (4.36)$$

де $\mathbf{x}_e \in \mathbb{R}^{3N}$, $\mathbf{x}_e = (\mathbf{x}_1^e, \mathbf{x}_2^e, \dots, \mathbf{x}_N^e)$ - положення рівноваги системи. Оскільки

$$\sum_{i=1}^N \Gamma_i \mathbf{x} \times \mathbf{x}_i^e = \mathbf{x} \times \sum_{i=1}^N \Gamma_i \mathbf{x}_i^e = \mathbf{x} \times \mathbf{0} = \mathbf{0}, \quad (4.37)$$

тому з (4.34) маємо $\mathfrak{g}_{\mu_e} \subset \ker DJ(\mathbf{0})$.

Доповнення $\mathfrak{C}_1 = \ker DJ(\mathbf{x}_e) \ominus \mathfrak{g}_{\mu_e}$ та $\mathfrak{C}_2 = TP \ominus \mathfrak{g}_{\mu_e}$ будуть просторами трансверсальних напрямків необхідних для теорем 4.4,4.3 відповідно. Вдалий вибір базису в цих просторах дозволяє спростити вигляд матриці другої варіації досліджуваного функціоналу. Конкретний вигляд "спрощуючого" базису повністю залежить від конфігурації системи.

Нехай B_1, B_2 - деякі базиси просторів \mathfrak{C}_1 та \mathfrak{C}_2 . Другу варіацію H_{μ_e} вздовж напрямків B_1, B_2 можна отримати, як

$$(\delta^2 H_{\mu_e}|_{B_l})_{i,j} = \delta \mathbf{x}_i^T D^2 H_{\mu_e} \delta \mathbf{x}_j, \quad \delta \mathbf{x}_i, \delta \mathbf{x}_j \in B_l, \quad i, j = 1, \dots, N, \quad l = 1, 2. \quad (4.38)$$

Як було вказано вище, положення рівноваги є критичними точками функціоналу енергії-моменту. З трансверсальної додатної (від'ємної) визначеності другої варіації слідує, що положення рівноваги є нелінійно стійким. У свою чергу, для того щоб показати що матриця є трансверсально

додатновизначеною (від'ємновизначеною), достатньо показати що власні значення, які відповідають напрямкам трансверсальним до положень рівноваги, є додатними (від'ємними). Зазначимо, що власні значення які відповідають напрямкам дотичним до орбіт положень рівноваги, повинні бути рівні нулю.

Для доведення нестійкості положень рівноваги можна скористатись наступною теоремою Ляпунова: якщо серед власних значень лінеаризованої навколо положення рівноваги системи є числа з додатною дійсною частиною, то оригінальна система є нестійкою.

4.1.2. Метод енергії-моменту в циліндричних координатах. Для дослідження стійкості осесиметричних конфігурацій досить зручно скористатись циліндричною системою координат, яка пов'язана зі сферичними координатами співвідношеннями

$$\begin{aligned} z_i &= \sqrt{\Gamma_i} \cos \theta_i, \\ \phi_i &= \text{sign}(\Gamma_i) \sqrt{\Gamma_i} \phi_i, \\ i &= 1, \dots, N. \end{aligned}$$

Гамільтоніан (2.32) прийме вигляд

$$H = \frac{1}{4\pi r^2} \sum_{i < j} \Gamma_i \Gamma_j \ln[2(1 - z_i z_j - \sqrt{r^2 - z_i^2} \sqrt{r^2 - z_j^2} \cos(\phi_i - \phi_j))]. \quad (4.39)$$

Якщо $\mathbf{J} \neq 0$ виберемо систему координат таким чином, щоб вісь Oz була співнапрявлена з вектором \mathbf{J} . Тоді функціонал енергії-моменту запишеться у вигляді

$$H_{\mu_e} = \frac{1}{4\pi r^2} \sum_{i < j} \Gamma_i \Gamma_j \ln[2(1 - z_i z_j - \sqrt{r^2 - z_i^2} \sqrt{r^2 - z_j^2} \cos(\phi_i - \phi_j))] - \omega \sum_{i=1}^N \Gamma_i z_i, \quad (4.40)$$

де ω - кутова швидкість обертання конфігурації. Оскільки даний функціонал лінійно залежить від координат, тому друга варіація H_{μ_e} співпадає з

другою варіацією H . Для спрощення запису другої варіації H покладемо $r = 1$ та домножимо H на 4π . Тоді компоненти матриці других похідних $\bar{H} = 4\pi H$ будуть мати вигляд

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial \phi_i^2} &= \\
&= \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{\Gamma_i \Gamma_j \cos(\phi_i - \phi_j) \sqrt{1 - z_i^2} \sqrt{1 - z_j^2} (1 - z_i z_j) - (1 - z_i^2)(1 - z_j^2)}{2 l_{ij}^2}, \\
\frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial \phi_i \partial \phi_j} &= \\
&= \frac{\Gamma_i \Gamma_j \cos(\phi_i - \phi_j) \sqrt{1 - z_i^2} \sqrt{1 - z_j^2} (1 - z_i z_j) + (1 - z_i^2)(1 - z_j^2)}{2 l_{ij}^2}, \\
\frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial z_i^2} &= \\
&= \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{\Gamma_i \Gamma_j}{2} \left[\frac{\left(z_j (1 - z_i^2) - \cos(\phi_i - \phi_j) z_i \sqrt{1 - z_j^2} \right)^2}{(1 - z_i^2) \sqrt{1 - z_j^2} l_{ij}^2} - \frac{\cos(\phi_i - \phi_j)}{(1 - z_i^2) l_{ij}} \right], \\
\frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial z_i \partial z_j} &= \\
&= \frac{\Gamma_i \Gamma_j \cos(\phi_i - \phi_j) \sqrt{1 - z_i^2} \sqrt{1 - z_j^2} (z_i z_j - 1) + \sqrt{1 - z_i^2} \sqrt{1 - z_j^2}}{2 \sqrt{1 - z_i^2} \sqrt{1 - z_j^2} l_{ij}^2}, \\
\frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial \phi_i^2} &= \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{\Gamma_i \Gamma_j \sin(\phi_i - \phi_j) \sqrt{1 - z_i^2} (z_i - z_j)}{2 \sqrt{1 - z_j^2} l_{ij}^2}, \\
\frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial \phi_i \partial \phi_j} &= \frac{\sin(\phi_i - \phi_j) \sqrt{1 - z_i^2} (z_i - z_j)}{\sqrt{1 - z_j^2} l_{ij}^2}.
\end{aligned}$$

Компоненти лінеаризованої системи пов'язані з компонентами матриці других похідних наступними співвідношенням:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \mathbf{z} \\ \boldsymbol{\phi} \end{pmatrix} = \mathbf{L}_{2N} \begin{pmatrix} \mathbf{z} \\ \boldsymbol{\phi} \end{pmatrix} = (\boldsymbol{\Omega}^b)^{-1} \mathbf{H}_{2N} \begin{pmatrix} \mathbf{z} \\ \boldsymbol{\phi} \end{pmatrix}, \quad (4.41)$$

де

$$(\mathbf{\Omega}^b)^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_N & \mathbf{I}_N \\ -\mathbf{I}_N & \mathbf{0}_N \end{pmatrix} \quad (4.42)$$

та $\mathbf{z}, \boldsymbol{\phi}$ - вектори-стовпці координат $z_i, \phi_i, i = 1, \dots, N$, $\mathbf{0}_N, \mathbf{I}_N$ - нульова та одинична матриці, $\mathbf{H}_{2N} = D^2(\mathbf{z}_e, \boldsymbol{\phi}_e)$ - матриця других похідних у положенні рівноваги.

На поверхні сфери, введена система циліндричних координат, по аналогії зі сферичними координатами має особливості на полюсах. Для того, щоб усунути дані особливості, для опису руху вихорів які знаходяться поблизу полюсів використаємо декартові координати. Нехай

$$(x_{l,s}, y_{l,s}, z_{l,s}), z_{l,s} = -\sqrt{r^2 - x_{l,s}^2 - y_{l,s}^2},$$

$$l = N + 1, \dots, N + N_s, \quad (4.43)$$

$$(x_{m,n}, y_{m,n}, z_{m,n}), z_{m,n} = \sqrt{r^2 - x_{m,n}^2 - y_{m,n}^2},$$

$$m = N + N_s + 1, \dots, N + N_s + N_n, \quad (4.44)$$

координати вихорів які рухаються поблизу південного та північного полюса, відповідно. Тоді з рівнянь руху (2.23) отримаємо

$$\begin{aligned} \dot{x}_{l,s} = & \sum_{i=1}^N \frac{\Gamma_i}{2\pi r l_{il}^2} (z_{l,s} \sin \phi_i \sqrt{r^2 - z_i^2} - y_{l,s} z_i) + \\ & + \sum_{j=N+1, j \neq l}^{N+N_s} \frac{\Gamma_j}{2\pi r l_{jl}^2} (y_{j,s} z_{l,s} - y_{l,s} z_{j,s}) + \\ & + \sum_{k=N+N_s+1}^{N+N_s+N_n} \frac{\Gamma_k}{2\pi r l_{kl}^2} (y_{k,n} z_{l,s} - y_{l,s} z_{k,n}), \\ \dot{y}_{l,s} = & \sum_{i=1}^N \frac{\Gamma_i}{2\pi r l_{il}^2} (-z_{l,s} \cos \phi_i \sqrt{r^2 - z_i^2} + x_{l,s} z_i) + \\ & + \sum_{j=N+1, j \neq l}^{N+N_s} \frac{\Gamma_j}{2\pi r l_{jl}^2} (-x_{j,s} z_{l,s} + x_{l,s} z_{j,s}) + \end{aligned}$$

$$+ \sum_{k=N+N_s+1}^{N+N_s+N_n} \frac{\Gamma_k}{2\pi r l_{kl}^2} (-x_{k,n} z_{l,s} + x_{l,s} z_{k,n}),$$

та

$$\begin{aligned} \dot{x}_{m,n} &= \sum_{i=1}^N \frac{\Gamma_i}{2\pi r l_{im}^2} (z_{m,n} \sin \phi_i \sqrt{r^2 - z_i^2} - y_{m,n} z_i) + \\ &\quad + \sum_{j=N+1}^{N+N_s} \frac{\Gamma_j}{2\pi r l_{jm}^2} (y_{j,s} z_{m,n} - y_{m,n} z_{j,s}) + \\ &\quad + \sum_{k=N+N_s+1, k \neq m}^{N+N_s+N_n} \frac{\Gamma_k}{2\pi r l_{km}^2} (y_{k,n} z_{m,n} - y_{m,n} z_{k,n}), \\ \dot{y}_{m,n} &= \sum_{i=1}^N \frac{\Gamma_i}{2\pi r l_{im}^2} (-z_{m,n} \cos \phi_i \sqrt{r^2 - z_i^2} + x_{m,n} z_i) + \\ &\quad + \sum_{j=N+1}^{N+N_s} \frac{\Gamma_j}{2\pi r l_{jm}^2} (-x_{j,s} z_{m,n} + x_{m,n} z_{j,s}) + \\ &\quad + \sum_{k=N+N_s+1, k \neq m}^{N+N_s+N_n} \frac{\Gamma_k}{2\pi r l_{km}^2} (-x_{k,n} z_{m,n} + x_{m,n} z_{k,n}). \end{aligned}$$

Дані рівняння допускають наступну форму запису

$$\begin{aligned} \dot{x}_{l,s} &= -\frac{z_{l,s}}{\Gamma_s} \frac{\partial H}{\partial y_{l,s}}, & \dot{y}_{l,s} &= \frac{z_{l,s}}{\Gamma_s} \frac{\partial H}{\partial x_{l,s}}, \\ \dot{x}_{m,n} &= -\frac{z_{m,n}}{\Gamma_n} \frac{\partial H}{\partial y_{m,n}}, & \dot{y}_{m,n} &= \frac{z_{m,n}}{\Gamma_n} \frac{\partial H}{\partial x_{m,n}}, \end{aligned}$$

де H - Гамільтоніан (2.32) записаний у даній змішаній системі координат

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{4\pi r^2} \left(\sum_{1 \leq i < j \leq N} \Gamma_i \Gamma_j \ln[2(1 - z_i z_j - \sqrt{r^2 - z_i^2} \sqrt{r^2 - z_j^2} \cos(\phi_i - \phi_j))] \right) + \\ &\quad + \sum_{i=1, j=N+1}^{i=N, j=N+N_s} \Gamma_i \Gamma_j \ln[2(1 - \sqrt{r^2 - z_i^2} (x_{j,s} \cos \phi_i + y_{j,s} \sin \phi_i) - z_{j,s} z_i)] + \\ &\quad + \sum_{i=1, j=N+N_s+1}^{i=N, j=N+N_s+N_n} \Gamma_i \Gamma_j \ln[2(1 - \sqrt{r^2 - z_i^2} (x_{j,n} \cos \phi_i + y_{j,n} \sin \phi_i) - z_{j,n} z_i)] - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{N+1 \leq i < j \leq N+N_s+1} \Gamma_i \Gamma_j \ln[2(1 - x_{i,s} x_{j,s} - y_{i,s} y_{j,s} - z_{i,s} z_{j,s})] - \\
& + \sum_{\substack{N+N_s+1 \leq i < j \leq N+N_s+N_n+1 \\ i=N+N_s, j=N+N_s+N_n}} \Gamma_i \Gamma_j \ln[2(1 - x_{i,n} x_{j,n} - y_{i,n} y_{j,n} - z_{i,n} z_{j,n})] - \\
& + \sum_{i=N+1, j=N+N_s+1} \Gamma_i \Gamma_j \ln[2(1 - x_{i,s} x_{j,n} - y_{i,s} y_{j,n} - z_{i,s} z_{j,n})] \Bigg). \quad (4.45)
\end{aligned}$$

Зазначимо, що у вищенаведених формулах величини $z_{i,n}, z_{j,s}$ - не є незалежними змінними. Вони є наступними функціями незалежних координат $x_{i,s}, y_{i,s}, x_{j,n}, y_{j,n}$:

$$\begin{aligned}
z_{i,s} &= -\sqrt{r^2 - x_{i,s}^2 - y_{i,s}^2}, \\
z_{j,n} &= \sqrt{r^2 - x_{j,n}^2 - y_{j,n}^2}.
\end{aligned}$$

Функціонал енергії-моменту в змішаній системі координат отримає вигляд

$$\begin{aligned}
H_{\mu_e} &= H - \omega \left(\sum_{i=1}^N \Gamma_i z_i - \sum_{i=N+1}^{N+N_s} \Gamma_i \sqrt{r^2 - x_{i,s}^2 - y_{i,s}^2} + \right. \\
& \left. + \sum_{i=N+N_s+1}^{N+N_s+N_n} \Gamma_i \sqrt{r^2 - x_{i,n}^2 - y_{i,n}^2} \right). \quad (4.46)
\end{aligned}$$

Відмітимо, що на відміну від функціоналу енергії-моменту записаного в циліндричних координатах, даний функціонал нелінійно залежить від координат, тому його друга варіація відрізняється від другої варіації H .

При дослідженні стійкості виникає необхідність використання змішаної системи координат у випадку, коли точкові вихорі знаходяться на полюсах, тобто коли

$$N_s \leq 1, \quad N_n \leq 1.$$

Тоді Гамільтоніан (4.45) та функціонал енергії-моменту (4.46) спростяться до вигляду

$$H = \frac{1}{4\pi r^2} \left(\sum_{1 \leq i < j \leq N} \Gamma_i \Gamma_j \ln[2(1 - z_i z_j - \sqrt{r^2 - z_i^2} \sqrt{r^2 - z_j^2} \cos(\phi_i - \phi_j))] + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i=1}^N \Gamma_i \Gamma_s \ln[2(1 - \sqrt{r^2 - z_i^2}(x_{1,s} \cos \phi_i + y_{1,s} \sin \phi_i) - z_{1,s} z_i)] + \\
& + \sum_{i=1}^N \Gamma_i \Gamma_n \ln[2(1 - \sqrt{r^2 - z_i^2}(x_{1,n} \cos \phi_i + y_{1,n} \sin \phi_i) - z_{1,n} z_i)] + \\
& + \Gamma_s \Gamma_n \ln[2(1 - x_{1,s} x_{1,n} - y_{1,s} y_{1,n} - z_{1,s} z_{1,n})], \tag{4.47}
\end{aligned}$$

$$H_{\mu_e} = H - \omega \left(\sum_{i=1}^N \Gamma_i z_i - \Gamma_s \sqrt{r^2 - x_{1,s}^2 - y_{1,s}^2} + \Gamma_n \sqrt{r^2 - x_{1,n}^2 - y_{1,n}^2} \right), \tag{4.48}$$

де Γ_n, Γ_s - інтенсивності вихорів розташованих на північному та південному полюсі, відповідно, та $z_{1,s} = \sqrt{r^2 - x_{1,s}^2 - y_{1,s}^2}$, $z_{1,n} = \sqrt{r^2 - x_{1,n}^2 - y_{1,n}^2}$.

4.2. Стійкість трьох точкових вихорів

Згідно з твердженнями 3.7,3.8 дослідимо окремо три випадки:

1. Вихорі не лежать на великому колі та утворюють вироджене положення відносної рівноваги ($\mathbf{c} = \mathbf{0}$).

4.1. Положення відносної рівноваги трьох точкових вихорів, які не лежать на великому колі та $\mathbf{c} = (-\mathbf{J}) = 0$ є нелінійно стійкими положеннями рівноваги.

Оскільки $\mathbf{J} = 0$, групою симетрій яка відповідає даному положенню рівноваги є група $G_{\mu_e} = \text{SO}(3)$. Тому

$$\mathbf{J}^{-1}(\mu_e)/G_{\mu_e} = \emptyset, \Rightarrow \ker D\mathbf{J}(\mathbf{x}_e)/\mathfrak{g}_{\mu_e} = \emptyset.$$

Тоді за теоремою 4.4, оскільки $\text{SO}(3)$ компактна, маємо, що досліджуване положення рівноваги нелінійно стійке. Іншими словами, з того що функціонал енергії-моменту досягає екстремуму в ізольованій точці, отримаємо формальну стійкість положення рівноваги, звідки за теоремою 4.4 слідує стійкість за Раусом.

2. Вихорі не лежать на великому колі та утворюють невироджене положення рівноваги ($\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$).

4.2. Положення відносної рівноваги трьох точкових вихорів, які не лежать на великому колі та $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$ є стійкими обертаннями навколо вектора \mathbf{c} у випадку, коли

$$\sum_{i < j} \Gamma_i \Gamma_j > 0,$$

та нестійкі, коли

$$\sum_{i < j} \Gamma_i \Gamma_j < 0.$$

Оскільки $\mathbf{c} = (-\mathbf{J}) \neq \mathbf{0}$ є інваріантом системи, тому відповідною групою симетрій є група $SO(2)$ - вона описує рух навколо вектора \mathbf{c} . Дана група також компактна, що дозволяє скористатись теоремою 4.4. Опишемо простір \mathfrak{C}_1 . Оскільки розмірність $so(2)$ рівна 1, простір дотичних напрямків матиме вигляд $\mathfrak{g}_{\mu_e} = \text{span}\{\mathbf{y}_o = (\mathbf{J} \times \mathbf{x}_1, \mathbf{J} \times \mathbf{x}_2, \mathbf{J} \times \mathbf{x}_3)\}$. Нехай $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^3$ лінійно незалежні вектори такі, що жоден з векторів $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{J}$ не лежить в площині побудованій на цих векторах. Виберемо наступний базис для $T_{\mathbf{x}_e}P$:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^{(1)} &= (\mathbf{x}_1 \times \mathbf{v}_1, \mathbf{0}, \mathbf{0}), \\ \mathbf{e}^{(2)} &= (\mathbf{0}, \mathbf{x}_2 \times \mathbf{v}_1, \mathbf{0}), \\ \mathbf{e}^{(3)} &= (\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{x}_3 \times \mathbf{v}_1), \\ \mathbf{e}^{(4)} &= (\mathbf{x}_1 \times \mathbf{v}_2, \mathbf{0}, \mathbf{0}), \\ \mathbf{e}^{(5)} &= (\mathbf{0}, \mathbf{x}_2 \times \mathbf{v}_2, \mathbf{0}), \\ \mathbf{e}^{(6)} &= (\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{x}_3 \times \mathbf{v}_2), \end{aligned}$$

Нехай $\alpha_i, i = 1, \dots, 3$ та $\beta_i, i = 1, \dots, 3$ розв'язки системи

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^3 \Gamma_i \alpha_i \mathbf{x}_i = \mathbf{v}_1, \text{ або } \sum_{i=1}^3 \Gamma_i \alpha_i \mathbf{x}_i = \mathbf{0}, \\ \sum_{i=1}^3 \Gamma_i \beta_i \mathbf{x}_i = \mathbf{v}_2, \text{ або } \sum_{i=1}^3 \Gamma_i \beta_i \mathbf{x}_i = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (4.49)$$

Тоді вектор $\mathbf{y} = \sum_{i=1}^3 \alpha_i \mathbf{e}^{(i)} + \sum_{i=1}^3 \beta_i \mathbf{e}^{(i+3)}$ буде належати $\ker D\mathbf{J}(\mathbf{x}_e)$, оскільки

$$D\mathbf{J} \cdot \mathbf{y} = -\frac{1}{r} \left(\sum_{i=1}^3 \Gamma_i \alpha_i \mathbf{x}_i \times \mathbf{v}_1 + \sum_{i=1}^3 \Gamma_i \beta_i \mathbf{x}_i \times \mathbf{v}_2 \right) = 0,$$

З того, що $\mathbf{J} \notin \text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ отримаємо, що

$$\mathbf{J} \notin K = \text{span}\left\{ \sum_{i=1}^3 \alpha_i \mathbf{e}^{(i)} + \sum_{i=1}^3 \beta_i \mathbf{e}^{(i+3)} \mid \alpha_i, \beta_i - \text{розв'язки (4.49)} \right\}.$$

З (4.34) слідує, що розмірність $\ker D\mathbf{J}(\mathbf{x}_e)$ рівна $2N - 3 = 6 - 3 = 3$. Розмірність \mathfrak{g}_{μ_e} рівна 1, тому $\dim(\mathfrak{C}_1) = 3 - 1 = 2$. Оскільки кожне з рівнянь у (4.49) має $N - 2 = 1$ розв'язок та вектори $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ лінійно незалежні отримаємо, що $K = \mathfrak{C}_1$.

Нехай $\mathbf{v}_1 = \Gamma_1 \mathbf{x}_1 + \Gamma_2 \mathbf{x}_2$ та $\mathbf{v}_2 = \Gamma_1 \mathbf{x}_1 + \Gamma_3 \mathbf{x}_3$. Неважко переконатись, що $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{J} \notin \text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$. Найпростіші лінійно незалежні розв'язки рівнянь (4.49)

$$\begin{aligned} \alpha_1^{(1)} = 1, \alpha_2^{(1)} = 1, \alpha_3^{(1)} = 0, \beta_i^{(1)} = 0, i = 1, \dots, 3, \\ \beta_1^{(2)} = 1, \beta_2^{(2)} = 0, \beta_3^{(2)} = 1, \alpha_i^{(2)} = 0, i = 1, \dots, 3. \end{aligned}$$

Тому

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}_1 = \text{span}\{ \boldsymbol{\epsilon}^{(1)} = (\Gamma_2 \mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2, -\Gamma_1 \mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2, \mathbf{0}), \\ \boldsymbol{\epsilon}^{(2)} = (\Gamma_3 \mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_3, \mathbf{0}, -\Gamma_1 \mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_3) \}. \end{aligned}$$

Виберемо наступні координати для положення рівноваги

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 &= (r \sin \theta, 0, r \cos \theta), \\ \mathbf{x}_2 &= \left(-\frac{r}{2} \sin \theta, \frac{r\sqrt{3}}{2} \sin \theta, \cos \theta \right), \\ \mathbf{x}_3 &= \left(-\frac{r}{2} \sin \theta, -\frac{r\sqrt{3}}{2} \sin \theta, \cos \theta \right), \end{aligned}$$

де $\theta \in (-\pi, \pi)$. Тоді

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2 &= \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}r^2 \cos \theta \sin \theta, -\frac{3}{2}r^2 \cos \theta \sin \theta, \frac{\sqrt{3}}{2}r^2 \sin^2 \theta\right), \\ \mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_3 &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}r^2 \cos \theta \sin \theta, -\frac{3}{2}r^2 \cos \theta \sin \theta, -\frac{\sqrt{3}}{2}r^2 \sin^2 \theta\right).\end{aligned}$$

З рівнянь (4.32), отримаємо

$$\begin{aligned}k_i &= -\Gamma_i^2 \frac{1}{12\pi r^3 \sin^2 \theta}, \quad i = 1, \dots, 3, \\ \boldsymbol{\xi} &= \left(\frac{\Gamma_2 + \Gamma_3 - 2\Gamma_1}{12\pi r^2 \sin \theta}, \frac{\Gamma_2 - \Gamma_3}{4\sqrt{3}\pi r^2 \sin \theta}, \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3}{6\pi r^2 \cos \theta}\right).\end{aligned}$$

Користуючись (4.38) отримаємо, що друга варіація функціоналу вздовж напрямків $\boldsymbol{\epsilon}^{(1)}, \boldsymbol{\epsilon}^{(2)}$ має вигляд

$$D^2 H_{\mu_e} |_{\{\boldsymbol{\epsilon}^{(1)}, \boldsymbol{\epsilon}^{(2)}\}} = \frac{3 \cos^2 \theta \Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_3}{4\pi} \begin{pmatrix} -\Gamma_1 - \Gamma_2 & \Gamma_1 \\ \Gamma_1 & -\Gamma_1 - \Gamma_3 \end{pmatrix}. \quad (4.50)$$

Дана двовимірна форма буде визначеною у випадку, коли її визначник додатній, тобто за умови

$$\Gamma_1 \Gamma_2 + \Gamma_1 \Gamma_3 + \Gamma_2 \Gamma_3 > 0.$$

У випадку, коли визначник від'ємний, буде існувати два напрямки, вздовж яких форма $D^2 H_{\mu_e}$ прийматиме протилежні знаки. Тобто положення рівноваги буде сідловою точкою H_{μ_e} у просторі \mathfrak{C}_1 . Тому при

$$\Gamma_1 \Gamma_2 + \Gamma_1 \Gamma_3 + \Gamma_2 \Gamma_3 < 0,$$

положення рівноваги буде нестійким.

3. Вихорі лежать на великому колі у вершинах рівнобедреного прямокутного трикутника та утворюють невироджене положення рівноваги ($\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$).

4.3. *Положення відносної рівноваги трьох точкових вихорів, які лежать на великому колі у вершинах рівнобедреного прямокутного трикутника ($\mathbf{x}_1 = -\mathbf{x}_3, \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2 = 0$) та є невиродженими ($\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$) є стійкими*

обертаннями навколо вектора \mathbf{c} у випадку, коли

$$\Gamma_1^2 + \Gamma_3^2 > \sum_{i \neq j} \Gamma_i \Gamma_j,$$

та нестійкі, коли

$$\Gamma_1^2 + \Gamma_3^2 < \sum_{i \neq j} \Gamma_i \Gamma_j.$$

Як і у попередньому випадку, вихори будуть обертатись навколо вектора $\mathbf{c} = (-\mathbf{J}) \neq \mathbf{0}$ та групою симетрій буде компактна група $\text{SO}(2)$. Для опису простору \mathfrak{C}_1 скористаємось аналогічними наведеним в попередньому пункті міркуваннями. Вибравши $\mathbf{v}_1 = \Gamma_1 \mathbf{x}_1 + \Gamma_2 \mathbf{x}_2$ та $\mathbf{v}_2 = \mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2$ (\mathbf{v}_2 - вектор ортогональний до екваторіальної площини в якій знаходяться вихори) отримаємо, що $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{J} \notin \text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$. Найпростіші лінійно незалежні розв'язки рівнянь (4.49)

$$\begin{aligned} \alpha_1^{(1)} &= 1, \alpha_2^{(1)} = 1, \alpha_3^{(1)} = 0, \beta_i^{(1)} = 0, i = 1, \dots, 3. \\ \beta_1^{(2)} &= \Gamma_3, \beta_2^{(2)} = 0, \beta_3^{(2)} = \Gamma_1, \alpha_i^{(2)} = 0, i = 1, \dots, 3. \end{aligned}$$

Тоді базис простору \mathfrak{C}_1 матиме наступний вигляд

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\epsilon}^{(1)} &= \mathbf{e}^{(1)} + \mathbf{e}^{(2)} = (\Gamma_2 \mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2, -\Gamma_1 \mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2, \mathbf{0}), \\ \boldsymbol{\epsilon}^{(2)} &= \Gamma_3 \mathbf{e}^{(4)} + \Gamma_1 \mathbf{e}^{(6)} = (\Gamma_3 \mathbf{x}_1 \times (\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2), \mathbf{0}, \Gamma_1 \mathbf{x}_3 \times (\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2)). \end{aligned}$$

Виберемо наступні координати для положення рівноваги

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 &= (r, 0, 0), \\ \mathbf{x}_2 &= (0, r, 0), \\ \mathbf{x}_3 &= (-r, 0, 0). \end{aligned}$$

Тоді

$$\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2 = (0, 0, r^2),$$

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_1 \times (\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2) &= (0, -r^3, 0), \\ \mathbf{x}_3 \times (\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2) &= (0, r^3, 0).\end{aligned}$$

З рівнянь (4.32), отримаємо

$$\begin{aligned}k_1 &= \frac{\Gamma_1(\Gamma_3 - 2\Gamma_1)}{16\pi r^3}, \\ k_2 &= -\frac{\Gamma_2^2}{8\pi r^3}, \\ k_3 &= \frac{\Gamma_3(\Gamma_1 - 2\Gamma_3)}{16\pi r^3}, \\ \boldsymbol{\xi} &= \left(\frac{\Gamma_1 - \Gamma_3}{4\pi r^2}, \frac{\Gamma_2}{4\pi r^2}, 0 \right).\end{aligned}$$

Друга варіація функціоналу вздовж напрямків $\boldsymbol{\epsilon}^{(1)}, \boldsymbol{\epsilon}^{(2)}$ має вигляд

$$D^2 H_{\mu_e} |_{\{\boldsymbol{\epsilon}^{(1)}, \boldsymbol{\epsilon}^{(2)}\}} = \frac{1}{8\pi} \begin{pmatrix} \Gamma_1 \Gamma_2^2 \Gamma_3 & 0 \\ 0 & r^2 \Gamma_1 \Gamma_3 (\Gamma_1^2 + \Gamma_3^2 - 2(\Gamma_1 \Gamma_2 + \Gamma_1 \Gamma_3 + \Gamma_2 \Gamma_3)) \end{pmatrix}.$$

По аналогії з попереднім випадком, дана двовимірна форма буде визначеною коли її визначник додатній, тобто за умови

$$\Gamma_1^2 + \Gamma_3^2 > 2(\Gamma_1 \Gamma_2 + \Gamma_1 \Gamma_3 + \Gamma_2 \Gamma_3).$$

У випадку, коли визначник від'ємний, буде існувати два напрямки, вздовж яких форма $D^2 H_{\mu_e}$ прийматиме протилежні знаки. Тобто положення рівноваги буде сідловою точкою H_{μ_e} у просторі \mathfrak{E}_1 . Тому при

$$\Gamma_1^2 + \Gamma_3^2 < 2(\Gamma_1 \Gamma_2 + \Gamma_1 \Gamma_3 + \Gamma_2 \Gamma_3),$$

положення рівноваги буде нестійким.

4. Вихорі лежать на великому колі у вершинах правильного трикутника та утворюють невироджене положення рівноваги ($\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$).

Для дослідження стійкості в даному випадку скористаємось теоремою 4.3. Базис для простору $T_{\mathbf{x}_e} P$ виберемо у наступному вигляді:

$$\mathbf{e}_i^{(i)} = \mathbf{x}_i^e \times (\mathbf{J} \times \mathbf{x}_i^e), \quad \mathbf{e}_j^{(i)} = \mathbf{0}, \quad i = 1, \dots, 3, j \neq i,$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_1^{(4)} &= -\alpha_1 \mathbf{J} \times \mathbf{x}_1^e, & \mathbf{e}_2^{(4)} &= \mathbf{J} \times \mathbf{x}_2^e, & \mathbf{e}_3^{(4)} &= \mathbf{J} \times \mathbf{x}_3^e, \\
\mathbf{e}_1^{(5)} &= 0, & \mathbf{e}_2^{(5)} &= -\alpha_2 \mathbf{J} \times \mathbf{x}_2^e, & \mathbf{e}_3^{(5)} &= \mathbf{J} \times \mathbf{x}_3^e, \\
\mathbf{e}_1^{(6)} &= \mathbf{J} \times \mathbf{x}_1^e, & \mathbf{e}_2^{(6)} &= \mathbf{J} \times \mathbf{x}_2^e, & \mathbf{e}_3^{(6)} &= \mathbf{J} \times \mathbf{x}_3^e,
\end{aligned}$$

де

$$\alpha_1 = \frac{(\mathbf{J} \times \mathbf{x}_2^e)^2 + (\mathbf{J} \times \mathbf{x}_3^e)^2}{(\mathbf{J} \times \mathbf{x}_1^e)^2}, \quad \alpha_2 = \frac{(\mathbf{J} \times \mathbf{x}_3^e)^2}{(\mathbf{J} \times \mathbf{x}_2^e)^2}.$$

α_1 та α_2 вибрані таким чином, щоб $\mathbf{e}^{(i)} \cdot \mathbf{e}^{(j)} = 0$ при $4 \leq i < j \leq 6$. Неважко переконатись, що $\mathbf{e}^{(i)} \cdot \mathbf{e}^{(j)} = 0$, $i = 1, \dots, 3, j = 1, \dots, 6, j \neq i$. Тобто даний базис буде ортогональним базисом простору $T_{\mathbf{x}_e} P$. Вектор $\mathbf{e}^{(6)}$ залишає незмінним вектор \mathbf{J} . Оскільки $\dim(\mathfrak{so}(2)) = 1$, тому $\mathfrak{g}_{\mu_e} = \text{span}\{\mathbf{e}^{(6)}\}$ та $\mathfrak{C}_2 = \text{span}\{\mathbf{e}^{(i)} | i = 1, \dots, 5\}$.

Не обмежуючи загальності будемо вважати, що площина великого кола співпадає з площиною Oxy та координати вихорів мають вигляд

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_1^e &= (r, 0, 0), \\
\mathbf{x}_2^e &= \left(-\frac{r}{2}, \frac{r\sqrt{3}}{2}, 0\right), \\
\mathbf{x}_3^e &= \left(-\frac{r}{2}, -\frac{r\sqrt{3}}{2}, 0\right).
\end{aligned}$$

Тоді

$$\begin{aligned}
\mathbf{J} &= \left(-(\Gamma_1 - \Gamma_2 \frac{1}{2} - \Gamma_3 \frac{1}{2}), -(\Gamma_2 \frac{\sqrt{3}}{2} - \Gamma_3 \frac{\sqrt{3}}{2}), 0\right), \\
l_{ij}^2 &= s^2 = 3r^2.
\end{aligned}$$

Ненульові компоненти векторів $\mathbf{e}^{(i)}$, $i = 1, \dots, 5$ матимуть вигляд

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_1^{(1)} &= \left(0, \frac{\sqrt{3}}{2} r^2 (\Gamma_2 - \Gamma_3), 0\right), \\
\mathbf{e}_2^{(2)} &= \left(\frac{3}{4} r^2 (\Gamma_1 - \Gamma_3), \frac{\sqrt{3}}{4} r^2 (\Gamma_1 - \Gamma_3), 0\right), \\
\mathbf{e}_3^{(3)} &= \left(\frac{3}{4} r^2 (\Gamma_1 - \Gamma_2), -\frac{\sqrt{3}}{4} r^2 (\Gamma_1 - \Gamma_2), 0\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_1^{(4)} &= (0, 0, r \frac{\frac{3}{4}(\Gamma_1 - \Gamma_2)^2 + \frac{3}{4}(\Gamma_1 - \Gamma_3)^2}{\frac{\sqrt{3}}{2}(\Gamma_2 - \Gamma_3)}), \\
\mathbf{e}_2^{(4)} &= (0, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}r(\Gamma_1 - \Gamma_3)), \\
\mathbf{e}_3^{(4)} &= (0, 0, -\frac{\sqrt{3}}{2}r(\Gamma_1 - \Gamma_2)), \\
\mathbf{e}_2^{(5)} &= (0, 0, -r \frac{\frac{3}{4}(\Gamma_1 - \Gamma_2)^2}{\frac{\sqrt{3}}{2}(\Gamma_1 - \Gamma_3)}), \\
\mathbf{e}_3^{(5)} &= (0, 0, -\frac{\sqrt{3}}{2}r(\Gamma_1 - \Gamma_2)).
\end{aligned}$$

Для подальших викладок важливі лише напрямки, тому вищенаведені вектори можна спростити до

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_1^{(1)} &= (0, (\Gamma_2 - \Gamma_3), 0), \\
\mathbf{e}_2^{(2)} &= ((\Gamma_1 - \Gamma_3), (\Gamma_1 - \Gamma_3), 0), \\
\mathbf{e}_3^{(3)} &= ((\Gamma_1 - \Gamma_2), (\Gamma_2 - \Gamma_1), 0), \\
\mathbf{e}_1^{(4)} &= (0, 0, \frac{(\Gamma_1 - \Gamma_2)^2 + (\Gamma_1 - \Gamma_3)^2}{(\Gamma_2 - \Gamma_3)}), \\
\mathbf{e}_2^{(4)} &= (0, 0, (\Gamma_1 - \Gamma_3)), \\
\mathbf{e}_3^{(4)} &= (0, 0, (\Gamma_2 - \Gamma_1)), \\
\mathbf{e}_2^{(5)} &= (0, 0, \frac{(\Gamma_1 - \Gamma_2)^2}{(\Gamma_1 - \Gamma_3)}), \\
\mathbf{e}_3^{(5)} &= (0, 0, (\Gamma_1 - \Gamma_2)).
\end{aligned}$$

Оскільки $\boldsymbol{\xi} = -\frac{\omega}{\|\mathbf{J}\|}\mathbf{J}$, тому з формули (4.32) маємо

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\xi} &= \frac{1}{2\pi r s^2} \sum_{i=1}^3 \Gamma_i \mathbf{x}_i, \\
k_i &= -\frac{\Gamma_i^2}{4\pi r s^2}.
\end{aligned}$$

З (4.35) отримаємо

$$D^2 H_{\mu_e} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \mathbf{A}_{13} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \mathbf{A}_{23} \\ \mathbf{A}_{31} & \mathbf{A}_{32} & \mathbf{A}_{33} \end{pmatrix}, \quad (4.51)$$

де

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{11} &= \begin{pmatrix} -\frac{\Gamma_1(6\Gamma_1+\Gamma_2+\Gamma_3)}{4\pi s^4} & \frac{\sqrt{3}\Gamma_1(\Gamma_2-\Gamma_3)}{4\pi s^4} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}\Gamma_1(\Gamma_2-\Gamma_3)}{4\pi s^4} & -\frac{3\Gamma_1(2\Gamma_1+\Gamma_2+\Gamma_3)}{4\pi s^4} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3\Gamma_1^2}{2\pi s^4} \end{pmatrix}, \\ \mathbf{A}_{22} &= \begin{pmatrix} -\frac{\Gamma_2(4\Gamma_1+6\Gamma_2+\Gamma_3)}{4\pi s^4} & -\frac{\sqrt{3}\Gamma_2\Gamma_3}{4\pi s^4} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}\Gamma_2\Gamma_3}{4\pi s^4} & -\frac{3\Gamma_2(2\Gamma_2+\Gamma_3)}{4\pi s^4} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3\Gamma_2^2}{2\pi s^4} \end{pmatrix}, \\ \mathbf{A}_{33} &= \begin{pmatrix} -\frac{\Gamma_3(4\Gamma_1+\Gamma_2+6\Gamma_3)}{4\pi s^4} & \frac{\sqrt{3}\Gamma_2\Gamma_3}{4\pi s^4} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}\Gamma_2\Gamma_3}{4\pi s^4} & -\frac{3\Gamma_3(\Gamma_2+2\Gamma_3)}{4\pi s^4} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3\Gamma_3^2}{2\pi s^4} \end{pmatrix}, \\ \mathbf{A}_{12} = \mathbf{A}_{21} &= \begin{pmatrix} -\frac{\Gamma_1\Gamma_2}{\pi s^4} & -\frac{\sqrt{3}\Gamma_1\Gamma_2}{2\pi s^4} & 0 \\ 0 & -\frac{3\Gamma_1\Gamma_2}{2\pi s^4} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3\Gamma_1\Gamma_2}{2\pi s^4} \end{pmatrix}, \\ \mathbf{A}_{13} = \mathbf{A}_{31} &= \begin{pmatrix} -\frac{\Gamma_1\Gamma_3}{\pi s^4} & \frac{\sqrt{3}\Gamma_1\Gamma_3}{2\pi s^4} & 0 \\ 0 & -\frac{3\Gamma_1\Gamma_3}{2\pi s^4} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3\Gamma_1\Gamma_3}{2\pi s^4} \end{pmatrix}, \\ \mathbf{A}_{23} = \mathbf{A}_{32} &= \begin{pmatrix} -\frac{7\Gamma_2\Gamma_3}{4\pi s^4} & -\frac{\sqrt{3}\Gamma_2\Gamma_3}{4\pi s^4} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}\Gamma_2\Gamma_3}{4\pi s^4} & -\frac{3\Gamma_2\Gamma_3}{4\pi s^4} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3\Gamma_2\Gamma_3}{2\pi s^4} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Тоді варіація вздовж $\mathbf{e}^{(i)}$, $i = 1, \dots, 5$ матиме вигляд

$$D^2 H_{\mu_e}|_{\mathbf{e}^{(i)}, i=1, \dots, 5} = \begin{pmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C} \end{pmatrix}, \quad (4.52)$$

де

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -\frac{3\Gamma_1(\Gamma_2-\Gamma_3)^2(2\Gamma_1+\Gamma_2+\Gamma_3)}{4\pi s^4} & \frac{(1+a)\Gamma_1\Gamma_2(\Gamma_1-\Gamma_3)(-\Gamma_2+\Gamma_3)}{2\pi s^4} & \frac{(1+a)\Gamma_1(\Gamma_1-\Gamma_2)(\Gamma_2-\Gamma_3)\Gamma_3}{2\pi s^4} \\ -\frac{(1+a)\Gamma_1\Gamma_2(\Gamma_1-\Gamma_3)(\Gamma_2-\Gamma_3)}{2\pi s^4} & -\frac{\Gamma_2(\Gamma_1-\Gamma_3)^2(2\Gamma_1+6\Gamma_2+a\Gamma_3)}{2\pi s^4} & -\frac{a(\Gamma_1-\Gamma_2)\Gamma_2(\Gamma_1-\Gamma_3)\Gamma_3}{2\pi s^4} \\ \frac{(1+a)\Gamma_1(\Gamma_1-\Gamma_2)(\Gamma_2-\Gamma_3)\Gamma_3}{2\pi s^4} & -\frac{a(\Gamma_1-\Gamma_2)\Gamma_2(\Gamma_1-\Gamma_3)\Gamma_3}{2\pi s^4} & -\frac{(\Gamma_1-\Gamma_2)^2\Gamma_3(2\Gamma_1+a\Gamma_2+6\Gamma_3)}{2\pi s^4} \end{pmatrix},$$

$$a = 2 + \sqrt{3},$$

$$\mathbf{C}_{11} = -\frac{6\Gamma_1^2(\Gamma_1^2 + \Gamma_2^2 - \Gamma_2\Gamma_3 + \Gamma_3^2 - \Gamma_1(\Gamma_2 + \Gamma_3))^2}{\pi s^4(\Gamma_2 - \Gamma_3)^2},$$

$$\mathbf{C}_{12} = \frac{1}{\pi s^4(\Gamma_1 - \Gamma_3)(-\Gamma_2 + \Gamma_3)}(3\Gamma_1(\Gamma_1^4(\Gamma_2 + \Gamma_3) - \Gamma_1^3(3\Gamma_2^2 + 3\Gamma_2\Gamma_3 + 2\Gamma_3^2) + \Gamma_1^2(4\Gamma_2^3 + 3\Gamma_2^2\Gamma_3 + 3\Gamma_2\Gamma_3^2 + 2\Gamma_3^3) + \Gamma_2(\Gamma_2^4 - \Gamma_2^3\Gamma_3 + 2\Gamma_2^2\Gamma_3^2 - \Gamma_2\Gamma_3^3 + \Gamma_3^4) - \Gamma_1(3\Gamma_2^4 + 3\Gamma_2^2\Gamma_3^2 + \Gamma_2\Gamma_3^3 + \Gamma_3^4))),$$

$$\mathbf{C}_{21} = \frac{1}{\pi s^4(\Gamma_2 - \Gamma_3)(-\Gamma_1 + \Gamma_3)}(3\Gamma_1(\Gamma_1^4(\Gamma_2 + \Gamma_3) - \Gamma_1^3(3\Gamma_2^2 + 3\Gamma_2\Gamma_3 + 2\Gamma_3^2) + \Gamma_1^2(4\Gamma_2^3 + 3\Gamma_2^2\Gamma_3 + 3\Gamma_2\Gamma_3^2 + 2\Gamma_3^3) + \Gamma_2(\Gamma_2^4 - \Gamma_2^3\Gamma_3 + 2\Gamma_2^2\Gamma_3^2 - \Gamma_2\Gamma_3^3 + \Gamma_3^4) - \Gamma_1(3\Gamma_2^4 + 3\Gamma_2^2\Gamma_3^2 + \Gamma_2\Gamma_3^3 + \Gamma_3^4))),$$

$$\mathbf{C}_{22} = -\frac{3(\Gamma_1^2(\Gamma_2 + \Gamma_3) + \Gamma_2(\Gamma_2^2 + \Gamma_3^2) - \Gamma_1(2\Gamma_2^2 + \Gamma_2\Gamma_3 + \Gamma_3^2))^2}{2\pi s^4(\Gamma_1 - \Gamma_3)^2}.$$

Визначник матриці $D^2 H_{\mu_e}|_{\mathbf{e}^{(i)}, i=1, \dots, 5}$ рівний нулеві. Це означає що матриця не є ні додатно, ні від'ємно визначеною і жодна з вищенаведених теорем не дає відповідь на питання щодо стійкості конфігурації. Даний результат повністю узгоджується з [40], де автори користуючись подібними міркуваннями показали, що аналіз другої варіації не містить повної інформації про стійкість положення рівноваги.

Оскільки визначник другої варіації функціоналу H_{μ_e} рівний нулеві вздовж напрямків $\mathbf{e}^{(i)}, i = 1, \dots, 5$, для дослідження стійкості розглянемо доданки вищого порядку у розкладі H_{μ_e} навколо положення рівноваги. Для спрощення викладок замість $\mathbf{e}^{(i)}, i = 1, \dots, 5$ скористаємось

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\epsilon}^{(i)} &= \mathbf{e}^{(i)}, 1 \leq i \leq 3, \\ \boldsymbol{\epsilon}_j^{(4)} &= (0, 0, \Gamma_j), 1 \leq j \leq 3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\epsilon}_1^{(5)} &= (0, 0, \Gamma_2^2 + \Gamma_3^2 - \Gamma_1(\Gamma_2 + \Gamma_3)), \\
\boldsymbol{\epsilon}_2^{(5)} &= (0, 0, \Gamma_1^2 + \Gamma_3^2 - \Gamma_2(\Gamma_1 + \Gamma_3)), \\
\boldsymbol{\epsilon}_3^{(5)} &= (0, 0, \Gamma_1^2 + \Gamma_2^2 - \Gamma_3(\Gamma_1 + \Gamma_2)), \\
\boldsymbol{\epsilon}^{(6)} &= \mathbf{e}^{(6)},
\end{aligned}$$

де вектори $\boldsymbol{\epsilon}^{(4)}, \boldsymbol{\epsilon}^{(5)}, \boldsymbol{\epsilon}^{(6)}$ - власні вектори матриці $D^2 H_{\mu_e}$, причому $\boldsymbol{\epsilon}^{(5)}, \boldsymbol{\epsilon}^{(6)}$ належать ядру матриці другої варіації. Користуючись базисом $\boldsymbol{\epsilon}^{(i)}, 1 \leq i \leq 6$ довільний вектор $\delta \mathbf{x} \in T_{\mathbf{x}_e} P$ можна представити у вигляді

$$\delta \mathbf{x} = \sum_{i=1}^6 \nu_i \boldsymbol{\epsilon}^{(i)}, \quad (4.53)$$

Тоді в околі положення рівноваги \mathbf{x}_e маємо

$$\begin{aligned}
H_{\mu_e}(\mathbf{x}_e + \delta \mathbf{x}) &= H_{\mu_e}(\mathbf{x}_e) + \delta \mathbf{x}^T D^2 H_{\mu_e} \delta \mathbf{x} + D^3 H_{\mu_e}(\delta \mathbf{x}, \delta \mathbf{x}, \delta \mathbf{x}) + \\
&+ D^4 H_{\mu_e}(\delta \mathbf{x}, \delta \mathbf{x}, \delta \mathbf{x}, \delta \mathbf{x}) + o(\|\delta \mathbf{x}\|^4),
\end{aligned}$$

де $D^3 H_{\mu_e}$ та $D^4 H_{\mu_e}$ - 3-форма та 4-форма третіх та четвертих похідних. Скориставшись заміною змінних (4.53) отримаємо

$$\begin{aligned}
H_{\mu_e}(\mathbf{x}_e + \sum_{i=1}^6 \nu_i \boldsymbol{\epsilon}^{(i)}) &= H_{\mu_e}(\mathbf{x}_e) + \boldsymbol{\nu}^T D_2 \boldsymbol{\nu} + D_3(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\nu}) + \\
&+ D_4(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\nu}) + o(\|\boldsymbol{\nu}\|^4),
\end{aligned}$$

де $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \dots, \nu_6)$, $\boldsymbol{\nu}^T D_2 \boldsymbol{\nu}$, D_3 , D_4 відповідні форми записані в змінних $\nu_i, i = 1, \dots, 6$. Оскільки нас цікавить трансверсальний до орбіти групи екстремум, покладемо $\nu_6 = 0$ (довільна варіація в $T_{\mathbf{x}_e} P$ яка має ненульову компоненту ν_6 за допомогою паралельного переносу вздовж орбіти може бути представлена як варіація відносно іншої точки орбіти з $\nu_6 = 0$). Серед $\nu_i, i = 1, \dots, 5$ тільки ν_5 відповідає нульовому напрямку D_2 . Тому, для того щоб скористатись лемою А.1 виконаємо наступну заміну змінних

$$\zeta_i = \nu_i, \quad i = 1, \dots, 3,$$

$$\zeta_4 = \nu_5^2, \quad \zeta_5 = \nu_4.$$

Тоді H_{μ_e} в околі положення рівноваги можна записати у вигляді (за умови $\nu_6 = 0$)

$$H_{\mu_e}(\mathbf{x}_e + \sum_{i=1}^5 \zeta_i \boldsymbol{\epsilon}^{(i)}) = H_{\mu_e}(\mathbf{x}_e) + \boldsymbol{\zeta}^T \tilde{\mathbf{D}}_2 \boldsymbol{\zeta} + o(\|\boldsymbol{\zeta}\|^2), \quad (4.54)$$

де $\boldsymbol{\zeta} = (\zeta_1, \dots, \zeta_6)$ та

$$\tilde{\mathbf{D}}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{F} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\frac{3(\Gamma_1^2 + \Gamma_2^2 + \Gamma_3^2)^2}{2\pi s^4} \end{pmatrix}.$$

де

$$\begin{aligned} F_{11} &= -\frac{3\Gamma_1(\Gamma_2 - \Gamma_3)^2(2\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3)}{4\pi s^4}, \\ F_{22} &= -\frac{\Gamma_2(\Gamma_1 - \Gamma_3)^2(2\Gamma_1 + 6\Gamma_2 + (2 + \sqrt{3})\Gamma_3)}{2\pi s^4}, \\ F_{33} &= -\frac{(\Gamma_1 - \Gamma_2)^2\Gamma_3(2\Gamma_1 + (2 + \sqrt{3})\Gamma_2 + 6\Gamma_3)}{2\pi s^4}, \\ F_{44} &= -\frac{36}{\pi s^6} [\Gamma_1^8\Gamma_2\Gamma_3 + \Gamma_2^3(\Gamma_2 - \Gamma_3)^4\Gamma_3^3 + \Gamma_1^7(\Gamma_2^3 + \Gamma_2^2\Gamma_3 + \Gamma_2\Gamma_3^2 + \Gamma_3^3) + \\ &+ \Gamma_1^2\Gamma_2(\Gamma_2 - \Gamma_3)^2\Gamma_3(\Gamma_2^4 - 6\Gamma_2^3\Gamma_3 - 6\Gamma_2\Gamma_3^3 + \Gamma_3^4) - \\ &- \Gamma_1^6(4\Gamma_2^4 + 5\Gamma_2^3\Gamma_3 + 8\Gamma_2^2\Gamma_3^2 + 5\Gamma_2\Gamma_3^3 + 4\Gamma_3^4) + \\ &+ \Gamma_1\Gamma_2(\Gamma_2 - \Gamma_3)^2\Gamma_3(\Gamma_2^5 + 3\Gamma_2^4\Gamma_3 + 3\Gamma_2\Gamma_3^4 + \Gamma_3^5) + \\ &+ \Gamma_1^5(6\Gamma_2^5 + 3\Gamma_2^4\Gamma_3 + 13\Gamma_2^3\Gamma_3^2 + 13\Gamma_2^2\Gamma_3^3 + 3\Gamma_2\Gamma_3^4 + 6\Gamma_3^5) - \\ &- \Gamma_1^4(4\Gamma_2^6 - 3\Gamma_2^5\Gamma_3 + 12\Gamma_2^4\Gamma_3^2 + 5\Gamma_2^3\Gamma_3^3 + 12\Gamma_2^2\Gamma_3^4 - 3\Gamma_2\Gamma_3^5 + 4\Gamma_3^6) + \\ &+ \Gamma_1^3(\Gamma_2^7 - 5\Gamma_2^6\Gamma_3 + 13\Gamma_2^5\Gamma_3^2 - 5\Gamma_2^4\Gamma_3^3 - 5\Gamma_2^3\Gamma_3^4 + 13\Gamma_2^2\Gamma_3^5 - 5\Gamma_2\Gamma_3^6 + \Gamma_3^7)], \\ F_{12} = F_{21} &= \frac{(3 + \sqrt{3})\Gamma_1\Gamma_2(\Gamma_1 - \Gamma_3)(-\Gamma_2 + \Gamma_3)}{2\pi s^4}, \\ F_{13} = F_{31} &= \frac{(3 + \sqrt{3})\Gamma_1(\Gamma_1 - \Gamma_2)(\Gamma_2 - \Gamma_3)\Gamma_3}{2\pi s^4}, \\ F_{14} = F_{41} &= \frac{9\Gamma_1(\Gamma_2 - \Gamma_3)^2}{2\pi s^5} \times \\ &\times [\Gamma_1^3(\Gamma_2 + \Gamma_3) + \Gamma_1(\Gamma_2 - \Gamma_3)^2(\Gamma_2 + \Gamma_3) + \\ &+ 2\Gamma_2\Gamma_3(\Gamma_2^2 + \Gamma_3^2) - 2\Gamma_1^2(\Gamma_2^2 + \Gamma_2\Gamma_3 + \Gamma_3^2)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{23} = F_{32} &= -\frac{(2 + \sqrt{3}) (\Gamma_1 - \Gamma_2) \Gamma_2 (\Gamma_1 - \Gamma_3) \Gamma_3}{2\pi s^4}, \\
F_{24} = F_{42} &= \frac{3}{2\pi s^5} \Gamma_2 (\Gamma_1 - \Gamma_3) (\Gamma_1^2 - \Gamma_1 \Gamma_2 + \Gamma_3 (-\Gamma_2 + \Gamma_3)) \times \\
&\times \left[\left((3 + \sqrt{3}) \Gamma_2 (\Gamma_2 - \Gamma_3) \Gamma_3 + \Gamma_1^2 \left(2\sqrt{3} \Gamma_2 + 3 (1 + \sqrt{3}) \Gamma_3 \right) - \right. \right. \\
&\left. \left. - \Gamma_1 \left(2\sqrt{3} \Gamma_2^2 + 3 (1 + \sqrt{3}) \Gamma_3^2 \right) \right], \\
F_{34} = F_{43} &= \frac{3}{2\pi s^5} (\Gamma_1 - \Gamma_2) \Gamma_3 (\Gamma_1^2 + \Gamma_2 (\Gamma_2 - \Gamma_3) - \Gamma_1 \Gamma_3) \times \\
&\times \left[- \left((3 + \sqrt{3}) \Gamma_2 (\Gamma_2 - \Gamma_3) \Gamma_3 + \Gamma_1^2 \left(3 (1 + \sqrt{3}) \Gamma_2 + 2\sqrt{3} \Gamma_3 \right) - \right. \right. \\
&\left. \left. - \Gamma_1 \left(3 (1 + \sqrt{3}) \Gamma_2^2 + 2\sqrt{3} \Gamma_3^2 \right) \right].
\end{aligned}$$

Згідно з лемою А.1, H_{μ_e} буде мати строгий локальний трансверсальний мінімум у випадку, коли $\tilde{\mathbf{D}}_2$ буде знаковизначеною. Оскільки $\{\tilde{\mathbf{D}}_2\}_{55} < 0$, тому четвертий та п'ятий мінори матимуть протилежні знаки і за критерієм Сільвестра можлива тільки від'ємна визначеність. Тому згідно з вищеназваним критерієм умови стійкості приймуть вигляд:

$$\left\{ \begin{array}{l}
-\frac{3}{4\pi s^4} \Gamma_1 (\Gamma_2 - \Gamma_3)^2 (2\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3) < 0, \\
\frac{1}{8\pi^2 s^8} 3\Gamma_1 \Gamma_2 (\Gamma_1 - \Gamma_3)^2 (\Gamma_2 - \Gamma_3)^2 [4\Gamma_1^2 + (\Gamma_2 + \Gamma_3) (6\Gamma_2 + (2 + \sqrt{3}) \Gamma_3) + \\
+ \Gamma_1 ((6 - 4\sqrt{3}) \Gamma_2 + 2(3 + \sqrt{3}) \Gamma_3)] > 0, \\
-\frac{1}{8\pi^3 s^{12}} 3\Gamma_1 (\Gamma_1 - \Gamma_2)^2 \Gamma_2 (\Gamma_1 - \Gamma_3)^2 (\Gamma_2 - \Gamma_3)^2 \Gamma_3 \times \\
\times [4\Gamma_1^3 - 2(-5 + \sqrt{3}) \Gamma_1^2 (\Gamma_2 + \Gamma_3) - \\
- \Gamma_1 ((-6 + \sqrt{3}) \Gamma_2^2 + 2(12 + 19\sqrt{3}) \Gamma_2 \Gamma_3 + (-6 + \sqrt{3}) \Gamma_3^2) + \\
+ 3(\Gamma_2 + \Gamma_3) ((2 + \sqrt{3}) \Gamma_2^2 + 6\Gamma_2 \Gamma_3 + (2 + \sqrt{3}) \Gamma_3^2)] < 0, \\
\det(\mathbf{F}) > 0.
\end{array} \right. \tag{4.55}$$

Зауваження 4.1. Відмітимо, що порушення даних умов не означає нестійкість. Для трьох точкових вихорів, які лежать у вершинах правильного екваторіального трикутника, знаходження областей нестійкості в загально-

му випадку є доволі складною задачею і вимагає окремого дослідження.

4.3. Стійкість симетричних конфігурацій

Наявність додаткової симетрії в системі дозволяє спростити викладки та на відміну від попереднього параграфу у більшості випадків дозволяє використати координатні методи для дослідження стійкості.

4.3.1. Стійкість тетраедра. Проведемо загальний аналіз стійкості конфігурацій у формі тетраедра. В попередньому розділі було показано, що тетраедр буде положенням відносної рівноваги при довільному наборі інтенсивностей Γ_i , $i = 1, \dots, 4$. В даному параграфі дослідимо стійкість невироджених конфігурацій ($\mathbf{J} \neq 0$). Стійкість виродженої конфігурації розглянуто в наступному параграфі.

4.4. Положення рівноваги у формі тетраедра при $\mathbf{J} \neq 0$ стійке у випадку

$$\begin{aligned}
& \Gamma_3 \Gamma_4 (\Gamma_1^4 \Gamma_2^2 + 2\Gamma_1^3 \Gamma_2^3 + \Gamma_1^2 \Gamma_2^4 + \Gamma_1^4 \Gamma_2 \Gamma_3 - 5\Gamma_1^3 \Gamma_2^2 \Gamma_3 - 5\Gamma_1^2 \Gamma_2^3 \Gamma_3 + \Gamma_1 \Gamma_2^4 \Gamma_3 + \\
& + \Gamma_1^3 \Gamma_2 \Gamma_3^2 + 2\Gamma_1^2 \Gamma_2^2 \Gamma_3^2 + \Gamma_1 \Gamma_2^3 \Gamma_3^2 + \Gamma_1^4 \Gamma_2 \Gamma_4 - 5\Gamma_1^3 \Gamma_2^2 \Gamma_4 - 5\Gamma_1^2 \Gamma_2^3 \Gamma_4 + \\
& + \Gamma_1 \Gamma_2^4 \Gamma_4 - 8\Gamma_1^3 \Gamma_2 \Gamma_3 \Gamma_4 + 32\Gamma_1^2 \Gamma_2^2 \Gamma_3 \Gamma_4 - 8\Gamma_1 \Gamma_2^3 \Gamma_3 \Gamma_4 + \Gamma_1^3 \Gamma_3^2 \Gamma_4 - \\
& - 5\Gamma_1^2 \Gamma_2 \Gamma_3^2 \Gamma_4 - 5\Gamma_1 \Gamma_2^2 \Gamma_3^2 \Gamma_4 + \Gamma_2^3 \Gamma_3^2 \Gamma_4 + \Gamma_1^3 \Gamma_2 \Gamma_4^2 + 2\Gamma_1^2 \Gamma_2^2 \Gamma_4^2 + \Gamma_1 \Gamma_2^3 \Gamma_4^2 + \\
& + \Gamma_1^3 \Gamma_3 \Gamma_4^2 - 5\Gamma_1^2 \Gamma_2 \Gamma_3 \Gamma_4^2 - 5\Gamma_1 \Gamma_2^2 \Gamma_3 \Gamma_4^2 + \Gamma_2^3 \Gamma_3 \Gamma_4^2 + \Gamma_1^2 \Gamma_3^2 \Gamma_4^2 + 2\Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_3^2 \Gamma_4^2 + \\
& + \Gamma_2^2 \Gamma_3^2 \Gamma_4^2) > 0, \tag{4.56}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{i>j} \Gamma_i^2 \Gamma_j^2 + \sum_{i \neq j \neq k} \Gamma_i^2 \Gamma_j \Gamma_k - 30\Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_3 \Gamma_4 > 0, \\
& \Gamma_1 \Gamma_2 (\Gamma_1^2 (\Gamma_2 + \Gamma_3) + \Gamma_2 \Gamma_3 (\Gamma_2 + \Gamma_3) + \Gamma_1 (\Gamma_2^2 - 6\Gamma_2 \Gamma_3 + \Gamma_3^2)) \times \\
& \times (\Gamma_2 \Gamma_3^2 \Gamma_4 (\Gamma_2 \Gamma_3^2 (2\Gamma_3 - \Gamma_4) \Gamma_4 + \Gamma_3^3 \Gamma_4^2 + \Gamma_2^3 (\Gamma_3 + \Gamma_4)^2 + \\
& + \Gamma_2^2 (\Gamma_3^3 - \Gamma_3 \Gamma_4^2)) + \Gamma_1^4 (\Gamma_3^2 \Gamma_4 (\Gamma_3 + \Gamma_4)^2 + \Gamma_2^3 (\Gamma_3^2 + 3\Gamma_3 \Gamma_4 + \Gamma_4^2) + \\
& + \Gamma_2 \Gamma_3 (\Gamma_3^3 - 2\Gamma_3^2 \Gamma_4 - 5\Gamma_3 \Gamma_4^2 - 2\Gamma_4^3) + \Gamma_2^2 (2\Gamma_3^3 + 2\Gamma_3 \Gamma_4^2 + \Gamma_4^3)) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\Gamma_1^2(\Gamma_3^4(2\Gamma_3 - \Gamma_4)\Gamma_4^2 - \Gamma_2\Gamma_3^3\Gamma_4(4\Gamma_3^2 - 8\Gamma_3\Gamma_4 + \Gamma_4^2) + \\
& +\Gamma_2^3\Gamma_3(-4\Gamma_3^3 + 14\Gamma_3^2\Gamma_4 + 26\Gamma_3\Gamma_4^2 - 5\Gamma_4^3) + \Gamma_2^4(2\Gamma_3^3 + 2\Gamma_3\Gamma_4^2 + \Gamma_4^3) + \\
& +2\Gamma_2^2\Gamma_3^2(\Gamma_3^3 + 13\Gamma_3^2\Gamma_4 - 19\Gamma_3\Gamma_4^2 + 3\Gamma_4^3)) + \Gamma_1\Gamma_3(\Gamma_3^4\Gamma_4^3 - \\
& -2\Gamma_2\Gamma_3^3\Gamma_4^2(2\Gamma_3 + \Gamma_4) - \Gamma_2^2\Gamma_3^2\Gamma_4(4\Gamma_3^2 - 8\Gamma_3\Gamma_4 + \Gamma_4^2) + \\
& +\Gamma_2^4(\Gamma_3^3 - 2\Gamma_3^2\Gamma_4 - 5\Gamma_3\Gamma_4^2 - 2\Gamma_4^3) + \Gamma_2^3\Gamma_3(\Gamma_3^3 - 14\Gamma_3^2\Gamma_4 - 5\Gamma_3\Gamma_4^2 + 4\Gamma_4^3)) + \\
& +\Gamma_1^3(\Gamma_3^3\Gamma_4(\Gamma_3^2 - \Gamma_4^2) + \Gamma_2^4(\Gamma_3^2 + 3\Gamma_3\Gamma_4 + \Gamma_4^2) + \Gamma_2^2\Gamma_3(-4\Gamma_3^3 + 14\Gamma_3^2\Gamma_4 + \\
& +26\Gamma_3\Gamma_4^2 - 5\Gamma_4^3) - 2\Gamma_2^3(2\Gamma_3^3 + 12\Gamma_3^2\Gamma_4 + 10\Gamma_3\Gamma_4^2 - \Gamma_4^3) + \\
& +\Gamma_2\Gamma_3^2(\Gamma_3^3 - 14\Gamma_3^2\Gamma_4 - 5\Gamma_3\Gamma_4^2 + 4\Gamma_4^3))) > 0.
\end{aligned}$$

Для доведення теореми використаємо векторний підхід розвинений у попередніх параграфах. Оскільки $\mathbf{J} \neq 0$, тому групою симетрій є група $SO(2)$ - обертань навколо вектора \mathbf{J} . Дана група є компактною, що дозволяє скористатись теоремою 4.4. Оскільки розмірність $so(2)$ рівна 1, простір нейтральних дотичних напрямків має вигляд $\mathfrak{g}_{\mu_e} = \text{span}\{\mathbf{y}_o = (\mathbf{J} \times \mathbf{x}_1, \mathbf{J} \times \mathbf{x}_2, \mathbf{J} \times \mathbf{x}_3, \mathbf{J} \times \mathbf{x}_4)\}$. Для опису простору \mathfrak{C}_1 , скористаємось методом описаним в попередньому параграфі. Нехай $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^3$ лінійно незалежні вектори такі, що жоден з векторів $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4, \mathbf{J}$ не лежить в площині побудованій на цих векторах. Виберемо наступний базис для $T_{\mathbf{x}_e}P$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}^{(1)} &= (\mathbf{x}_1 \times \mathbf{v}_1, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}), \\
\mathbf{e}^{(2)} &= (\mathbf{0}, \mathbf{x}_2 \times \mathbf{v}_1, \mathbf{0}, \mathbf{0}), \\
\mathbf{e}^{(3)} &= (\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{x}_3 \times \mathbf{v}_1, \mathbf{0}), \\
\mathbf{e}^{(4)} &= (\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{x}_4 \times \mathbf{v}_1), \\
\mathbf{e}^{(5)} &= (\mathbf{x}_1 \times \mathbf{v}_2, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}), \\
\mathbf{e}^{(6)} &= (\mathbf{0}, \mathbf{x}_2 \times \mathbf{v}_2, \mathbf{0}, \mathbf{0}), \\
\mathbf{e}^{(7)} &= (\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{x}_3 \times \mathbf{v}_2, \mathbf{0}), \\
\mathbf{e}^{(8)} &= (\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{x}_3 \times \mathbf{v}_2),
\end{aligned}$$

Нехай $\alpha_i, i = 1, \dots, 4$ та $\beta_i, i = 1, \dots, 4$ розв'язки системи

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^4 \Gamma_i \alpha_i \mathbf{x}_i = \mathbf{v}_1, \text{ або } \sum_{i=1}^4 \Gamma_i \alpha_i \mathbf{x}_i = 0, \\ \sum_{i=1}^4 \Gamma_i \beta_i \mathbf{x}_i = \mathbf{v}_2, \text{ або } \sum_{i=1}^4 \Gamma_i \beta_i \mathbf{x}_i = 0. \end{cases} \quad (4.57)$$

Тоді вектор $\mathbf{y} = \sum_{i=1}^4 \alpha_i \mathbf{e}^{(i)} + \sum_{i=1}^4 \beta_i \mathbf{e}^{(i+4)}$ буде належати $\ker D\mathbf{J}(\mathbf{x}_e)$, оскільки

$$D\mathbf{J} \cdot \mathbf{y} = -\frac{1}{r} \left(\sum_{i=1}^4 \Gamma_i \alpha_i \mathbf{x}_i \times \mathbf{v}_1 + \sum_{i=1}^4 \Gamma_i \beta_i \mathbf{x}_i \times \mathbf{v}_2 \right) = 0,$$

З того, що $\mathbf{J} \notin \text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ отримаємо, що

$$\mathbf{J} \notin K = \text{span}\left\{ \sum_{i=1}^4 \alpha_i \mathbf{e}^{(i)} + \sum_{i=1}^4 \beta_i \mathbf{e}^{(i+4)} \mid \alpha_i, \beta_i - \text{розв'язки (4.49)} \right\}.$$

З (4.34) слідує, що розмірність $\ker D\mathbf{J}(\mathbf{x}_e)$ рівна $2N - 3 = 8 - 3 = 5$. Розмірність \mathfrak{g}_{μ_e} рівна 1, тому $\dim(\mathfrak{C}_1) = 5 - 1 = 4$. Оскільки кожне з рівнянь у (4.49) має $N - 2 = 2$ незалежних розв'язки та вектори $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ лінійно незалежні отримаємо, що $K = \mathfrak{C}_1$.

Нехай $\mathbf{v}_1 = \Gamma_1 \mathbf{x}_1 + \Gamma_2 \mathbf{x}_2 + \Gamma_3 \mathbf{x}_3$ та $\mathbf{v}_2 = \Gamma_1 \mathbf{x}_1 + \Gamma_2 \mathbf{x}_2 + \Gamma_4 \mathbf{x}_4$. Оскільки $\Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_3 \Gamma_4 \neq 0$, тому $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4, \mathbf{J} \notin \text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$. Найпростіші лінійно незалежні розв'язки системи (4.57)

$$\begin{aligned} \alpha_1^{(1)} &= 1, \alpha_2^{(1)} = 1, \alpha_3^{(1)} = 1, \alpha_4^{(1)} = 0, \beta_i^{(1)} = 0, i = 1, \dots, 4. \\ \beta_1^{(2)} &= 1, \beta_2^{(2)} = 1, \beta_3^{(2)} = 0, \beta_4^{(2)} = 1, \alpha_i^{(2)} = 0, i = 1, \dots, 4. \\ \alpha_1^{(3)} &= \frac{1}{\Gamma_1}, \alpha_2^{(3)} = \frac{1}{\Gamma_2}, \alpha_3^{(3)} = \frac{1}{\Gamma_3}, \alpha_4^{(3)} = \frac{1}{\Gamma_4}, \beta_i^{(3)} = 0, i = 1, \dots, 4. \\ \beta_1^{(4)} &= \frac{1}{\Gamma_1}, \beta_2^{(4)} = \frac{1}{\Gamma_2}, \beta_3^{(4)} = \frac{1}{\Gamma_3}, \beta_4^{(4)} = \frac{1}{\Gamma_4}, \alpha_i^{(4)} = 0, i = 1, \dots, 4. \end{aligned}$$

Тоді базис простору \mathfrak{C}_1 матиме наступний вигляд

$$\boldsymbol{\epsilon}^{(1)} = \mathbf{e}^{(1)} + \mathbf{e}^{(2)} + \mathbf{e}^{(3)} =$$

$$\begin{aligned}
&= (\Gamma_2 \mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2 + \Gamma_3 \mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_3, -\Gamma_1 \mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2 + \Gamma_3 \mathbf{x}_2 \times \mathbf{x}_3, \\
&\quad -\Gamma_1 \mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_3 - \Gamma_2 \mathbf{x}_2 \times \mathbf{x}_3, \mathbf{0}), \\
\boldsymbol{\epsilon}^{(2)} &= \mathbf{e}^{(5)} + \mathbf{e}^{(6)} + \mathbf{e}^{(8)} = \\
&= (\Gamma_2 \mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2 + \Gamma_4 \mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_4, -\Gamma_1 \mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2 + \Gamma_4 \mathbf{x}_2 \times \mathbf{x}_4, \\
&\quad \mathbf{0}, -\Gamma_1 \mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_4 - \Gamma_2 \mathbf{x}_2 \times \mathbf{x}_4), \\
\boldsymbol{\epsilon}^{(3)} &= \frac{1}{\Gamma_1} \mathbf{e}^{(1)} + \frac{1}{\Gamma_2} \mathbf{e}^{(2)} + \frac{1}{\Gamma_3} \mathbf{e}^{(3)} + \frac{1}{\Gamma_4} \mathbf{e}^{(4)} = \\
&= \left(\frac{\Gamma_2}{\Gamma_1} \mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2 + \frac{\Gamma_3}{\Gamma_1} \mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_3, -\frac{\Gamma_1}{\Gamma_2} \mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2 + \frac{\Gamma_3}{\Gamma_2} \mathbf{x}_2 \times \mathbf{x}_3, \right. \\
&\quad \left. -\frac{\Gamma_1}{\Gamma_3} \mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_3 - \frac{\Gamma_2}{\Gamma_3} \mathbf{x}_2 \times \mathbf{x}_3, -\frac{\Gamma_1}{\Gamma_4} \mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_4 - \frac{\Gamma_2}{\Gamma_4} \mathbf{x}_2 \times \mathbf{x}_4 - \frac{\Gamma_3}{\Gamma_4} \mathbf{x}_3 \times \mathbf{x}_4 \right), \\
\boldsymbol{\epsilon}^{(4)} &= \frac{1}{\Gamma_1} \mathbf{e}^{(5)} + \frac{1}{\Gamma_2} \mathbf{e}^{(6)} + \frac{1}{\Gamma_3} \mathbf{e}^{(7)} + \frac{1}{\Gamma_4} \mathbf{e}^{(8)} = \\
&= \left(\frac{\Gamma_2}{\Gamma_1} \mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2 + \frac{\Gamma_4}{\Gamma_1} \mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_4, -\frac{\Gamma_1}{\Gamma_2} \mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2 + \frac{\Gamma_4}{\Gamma_2} \mathbf{x}_2 \times \mathbf{x}_4, \right. \\
&\quad \left. -\frac{\Gamma_1}{\Gamma_3} \mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_3 - \frac{\Gamma_2}{\Gamma_3} \mathbf{x}_2 \times \mathbf{x}_3 + \frac{\Gamma_4}{\Gamma_3} \mathbf{x}_3 \times \mathbf{x}_4, -\frac{\Gamma_1}{\Gamma_4} \mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_4 - \frac{\Gamma_2}{\Gamma_4} \mathbf{x}_2 \times \mathbf{x}_4 \right).
\end{aligned}$$

Виберемо наступні координати для положення рівноваги

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_1 &= \left(\frac{r}{\sqrt{3}}, \frac{r}{\sqrt{3}}, \frac{r}{\sqrt{3}} \right), \\
\mathbf{x}_2 &= \left(\frac{r}{\sqrt{3}}, -\frac{r}{\sqrt{3}}, -\frac{r}{\sqrt{3}} \right), \\
\mathbf{x}_3 &= \left(-\frac{r}{\sqrt{3}}, \frac{r}{\sqrt{3}}, -\frac{r}{\sqrt{3}} \right), \\
\mathbf{x}_4 &= \left(-\frac{r}{\sqrt{3}}, -\frac{r}{\sqrt{3}}, \frac{r}{\sqrt{3}} \right).
\end{aligned}$$

Тоді

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2 &= \left(0, \frac{2r^2}{3}, -\frac{2r^2}{3} \right), \\
\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_3 &= \left(-\frac{2r^2}{3}, 0, \frac{2r^2}{3} \right), \\
\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_4 &= \left(\frac{2r^2}{3}, -\frac{2r^2}{3}, 0 \right), \\
\mathbf{x}_2 \times \mathbf{x}_3 &= \left(\frac{2r^2}{3}, \frac{2r^2}{3}, 0 \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_2 \times \mathbf{x}_4 &= \left(-\frac{2r^2}{3}, 0, -\frac{2r^2}{3}\right), \\ \mathbf{x}_3 \times \mathbf{x}_4 &= \left(0, \frac{2r^2}{3}, \frac{2r^2}{3}\right).\end{aligned}$$

З рівнянь (4.32), отримаємо

$$\begin{aligned}k_i &= -\frac{3\Gamma_i^2}{32\pi r^3}, \quad i = 1, \dots, 4, \\ \boldsymbol{\xi} &= \left(\frac{\sqrt{3}(\Gamma_1 + \Gamma_2 - \Gamma_3 - \Gamma_4)}{16\pi r^2}, \right. \\ &\quad \frac{\sqrt{3}(\Gamma_1 - \Gamma_2 + \Gamma_3 - \Gamma_4)}{16\pi r^2}, \\ &\quad \left. \frac{\sqrt{3}(\Gamma_1 - \Gamma_2 - \Gamma_3 + \Gamma_4)}{16\pi r^2}\right).\end{aligned}$$

Друга варіація функціоналу вздовж напрямків $\boldsymbol{\epsilon}^{(j)}$, $j = 1, \dots, 4$ має вигляд

$$D^2 H_{\mu_e} |_{\boldsymbol{\epsilon}^{(j)}, j=1, \dots, 4} = (d_{ij})_{i=1, \dots, 4, j=1, \dots, 4},$$

де

$$\begin{aligned}d_{11} &= -\frac{1}{3}\Gamma_1^2\Gamma_2\Gamma_4 - \frac{1}{3}\Gamma_1\Gamma_2^2\Gamma_4 - \frac{1}{3}\Gamma_1^2\Gamma_3\Gamma_4 + 2\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3\Gamma_4 - \\ &\quad -\frac{1}{3}\Gamma_2^2\Gamma_3\Gamma_4 - \frac{1}{3}\Gamma_1\Gamma_3^2\Gamma_4 - \frac{1}{3}\Gamma_2\Gamma_3^2\Gamma_4, \\ d_{22} &= -\frac{1}{3}\Gamma_1^2\Gamma_2\Gamma_3 - \frac{1}{3}\Gamma_1\Gamma_2^2\Gamma_3 - \frac{1}{3}\Gamma_1^2\Gamma_3\Gamma_4 + 2\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3\Gamma_4 - \\ &\quad -\frac{1}{3}\Gamma_2^2\Gamma_3\Gamma_4 - \frac{1}{3}\Gamma_1\Gamma_3\Gamma_4^2 - \frac{1}{3}\Gamma_2\Gamma_3\Gamma_4^2, \\ d_{33} &= 2\Gamma_1^2 - \frac{4\Gamma_1\Gamma_2}{3} + 2\Gamma_2^2 - \frac{\Gamma_1^2\Gamma_2}{3\Gamma_3} - \frac{\Gamma_1\Gamma_2^2}{3\Gamma_3} - \frac{4\Gamma_1\Gamma_3}{3} - \frac{\Gamma_1^2\Gamma_3}{3\Gamma_2} - \frac{4\Gamma_2\Gamma_3}{3} - \\ &\quad -\frac{\Gamma_2^2\Gamma_3}{3\Gamma_1} + 2\Gamma_3^2 - \frac{\Gamma_1\Gamma_3^2}{3\Gamma_2} - \frac{\Gamma_2\Gamma_3^2}{3\Gamma_1} - \frac{\Gamma_1^2\Gamma_2}{3\Gamma_4} - \frac{\Gamma_1\Gamma_2^2}{3\Gamma_4} - \frac{\Gamma_1^2\Gamma_3}{3\Gamma_4} + \frac{2\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3}{\Gamma_4} - \\ &\quad -\frac{\Gamma_2^2\Gamma_3}{3\Gamma_4} - \frac{\Gamma_1\Gamma_3^2}{3\Gamma_4} - \frac{\Gamma_2\Gamma_3^2}{3\Gamma_4} - \frac{\Gamma_1^2\Gamma_4}{3\Gamma_2} - \frac{\Gamma_2^2\Gamma_4}{3\Gamma_1} - \frac{\Gamma_1^2\Gamma_4}{3\Gamma_3} + \frac{2\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_4}{3\Gamma_3} - \frac{\Gamma_2^2\Gamma_4}{3\Gamma_3} + \\ &\quad + \frac{2\Gamma_1\Gamma_3\Gamma_4}{3\Gamma_2} + \frac{2\Gamma_2\Gamma_3\Gamma_4}{3\Gamma_1} - \frac{\Gamma_3^2\Gamma_4}{3\Gamma_1} - \frac{\Gamma_3^2\Gamma_4}{3\Gamma_2}, \\ d_{44} &= 2\Gamma_1^2 - \frac{4\Gamma_1\Gamma_2}{3} + 2\Gamma_2^2 - \frac{\Gamma_1^2\Gamma_2}{3\Gamma_3} - \frac{\Gamma_1\Gamma_2^2}{3\Gamma_3} - \frac{\Gamma_1^2\Gamma_3}{3\Gamma_2} - \frac{\Gamma_2^2\Gamma_3}{3\Gamma_1} - \frac{\Gamma_1^2\Gamma_2}{3\Gamma_4} -\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\Gamma_1\Gamma_2^2}{3\Gamma_4} - \frac{\Gamma_1^2\Gamma_3}{3\Gamma_4} + \frac{2\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3}{3\Gamma_4} - \frac{\Gamma_2^2\Gamma_3}{3\Gamma_4} - \frac{4\Gamma_1\Gamma_4}{3} - \frac{\Gamma_1^2\Gamma_4}{3\Gamma_2} - \frac{4\Gamma_2\Gamma_4}{3} - \frac{\Gamma_2^2\Gamma_4}{3\Gamma_1} - \\
& -\frac{\Gamma_1^2\Gamma_4}{3\Gamma_3} + \frac{2\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_4}{\Gamma_3} - \frac{\Gamma_2^2\Gamma_4}{3\Gamma_3} + \frac{2\Gamma_1\Gamma_3\Gamma_4}{3\Gamma_2} + \frac{2\Gamma_2\Gamma_3\Gamma_4}{3\Gamma_1} + 2\Gamma_4^2 - \frac{\Gamma_1\Gamma_4^2}{3\Gamma_2} - \\
& -\frac{\Gamma_2\Gamma_4^2}{3\Gamma_1} - \frac{\Gamma_1\Gamma_4^2}{3\Gamma_3} - \frac{\Gamma_2\Gamma_4^2}{3\Gamma_3} - \frac{\Gamma_3\Gamma_4^2}{3\Gamma_1} - \frac{\Gamma_3\Gamma_4^2}{3\Gamma_2}, \\
d_{12} = d_{21} &= \frac{1}{3}\Gamma_1^2\Gamma_3\Gamma_4 - \frac{2}{3}\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3\Gamma_4 + \frac{1}{3}\Gamma_2^2\Gamma_3\Gamma_4, \\
d_{13} = d_{31} &= \frac{1}{3}\Gamma_1^2\Gamma_2 + \frac{1}{3}\Gamma_1\Gamma_2^2 + \frac{1}{3}\Gamma_1^2\Gamma_3 - 2\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3 + \frac{1}{3}\Gamma_2^2\Gamma_3 + \frac{1}{3}\Gamma_1\Gamma_3^2 + \\
& + \frac{1}{3}\Gamma_2\Gamma_3^2 - \frac{2}{3}\Gamma_1^2\Gamma_4 + \frac{2}{3}\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_4 - \frac{2}{3}\Gamma_2^2\Gamma_4 + \frac{2}{3}\Gamma_1\Gamma_3\Gamma_4 + \frac{2}{3}\Gamma_2\Gamma_3\Gamma_4 - \frac{2}{3}\Gamma_3^2\Gamma_4, \\
d_{14} = d_{41} &= \frac{1}{3}\Gamma_1^2\Gamma_2 + \frac{1}{3}\Gamma_1\Gamma_2^2 + \frac{1}{3}\Gamma_1^2\Gamma_3 - \frac{4}{3}\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3 + \frac{1}{3}\Gamma_2^2\Gamma_3 - \frac{2}{3}\Gamma_1^2\Gamma_4 + \\
& + \frac{2}{3}\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_4 - \frac{2}{3}\Gamma_2^2\Gamma_4 + \frac{1}{3}\Gamma_1\Gamma_3\Gamma_4 + \frac{1}{3}\Gamma_2\Gamma_3\Gamma_4, \\
d_{23} = d_{32} &= \frac{1}{3}\Gamma_1^2\Gamma_2 + \frac{1}{3}\Gamma_1\Gamma_2^2 - \frac{2}{3}\Gamma_1^2\Gamma_3 + \frac{2}{3}\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3 - \frac{2}{3}\Gamma_2^2\Gamma_3 + \frac{1}{3}\Gamma_1^2\Gamma_4 - \\
& - \frac{4}{3}\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_4 + \frac{1}{3}\Gamma_2^2\Gamma_4 + \frac{1}{3}\Gamma_1\Gamma_3\Gamma_4 + \frac{1}{3}\Gamma_2\Gamma_3\Gamma_4, \\
d_{24} = d_{42} &= \frac{1}{3}\Gamma_1^2\Gamma_2 + \frac{1}{3}\Gamma_1\Gamma_2^2 - \frac{2}{3}\Gamma_1^2\Gamma_3 + \frac{2}{3}\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3 - \frac{2}{3}\Gamma_2^2\Gamma_3 + \frac{1}{3}\Gamma_1^2\Gamma_4 - \\
& - 2\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_4 + \frac{1}{3}\Gamma_2^2\Gamma_4 + \frac{2}{3}\Gamma_1\Gamma_3\Gamma_4 + \frac{2}{3}\Gamma_2\Gamma_3\Gamma_4 + \frac{1}{3}\Gamma_1\Gamma_4^2 + \frac{1}{3}\Gamma_2\Gamma_4^2 - \frac{2}{3}\Gamma_3\Gamma_4^2, \\
d_{34} = d_{43} &= 2\Gamma_1^2 - \frac{4\Gamma_1\Gamma_2}{3} + 2\Gamma_2^2 - \frac{\Gamma_1^2\Gamma_2}{3\Gamma_3} - \frac{\Gamma_1\Gamma_2^2}{3\Gamma_3} - \frac{2\Gamma_1\Gamma_3}{3} - \frac{\Gamma_1^2\Gamma_3}{3\Gamma_2} - \\
& - \frac{2\Gamma_2\Gamma_3}{3} - \frac{\Gamma_2^2\Gamma_3}{3\Gamma_1} - \frac{\Gamma_1^2\Gamma_2}{3\Gamma_4} - \frac{\Gamma_1\Gamma_2^2}{3\Gamma_4} - \frac{\Gamma_1^2\Gamma_3}{3\Gamma_4} + \frac{4\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3}{3\Gamma_4} - \frac{\Gamma_2^2\Gamma_3}{3\Gamma_4} - \frac{2\Gamma_1\Gamma_4}{3} - \\
& - \frac{\Gamma_1^2\Gamma_4}{3\Gamma_2} - \frac{2\Gamma_2\Gamma_4}{3} - \frac{\Gamma_2^2\Gamma_4}{3\Gamma_1} - \frac{\Gamma_1^2\Gamma_4}{3\Gamma_3} + \frac{4\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_4}{3\Gamma_3} - \frac{\Gamma_2^2\Gamma_4}{3\Gamma_3} - \frac{2\Gamma_3\Gamma_4}{3} + \\
& + \frac{\Gamma_1\Gamma_3\Gamma_4}{\Gamma_2} + \frac{\Gamma_2\Gamma_3\Gamma_4}{\Gamma_1}.
\end{aligned}$$

Дана квадратична форма буде визначеною у випадку, коли 2-й та 4-й головні мінори додатні разом з добутком 1-го та 3-го. Після спрощень дані умови запишуться у вигляді (4.56).

4.3.2. Стійкість правильної трикутної піраміди. Згідно з Твердженням 3.9 правильна трикутна піраміда з основою в екваторіальній пло-

щині буде положенням відносної рівноваги за умови, коли вихорі розміщені в основі мають однакову інтенсивність. Нехай $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_3$. Введемо безрозмірний параметр $\kappa = \frac{\Gamma_4}{\Gamma_1}$.

4.5. *Правильна трикутна піраміда є нелінійно стійким положенням відносної рівноваги при*

$$\kappa > 0, \quad (4.58)$$

лінійно стійким при

$$-\frac{9}{8} < \kappa < 0, \quad (4.59)$$

та нестійким, коли

$$\kappa < -\frac{9}{8}. \quad (4.60)$$

Оскільки при довільному κ , вектори \mathbf{J} та \mathbf{x}_1 співнапрямлені та \mathbf{J} ортогональний площині в якій знаходяться $\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4$ тому для дослідження стійкості в даному випадку зручно скористаємось координатним методом. Нехай $\mathbf{e}_z = \frac{\mathbf{J}}{\|\mathbf{J}\|}$. Для спрощення викладок, покладемо $r = 1$. В змішаній системі координат (4.43) досліджуване положення рівноваги має координати

$$\begin{aligned} (x_n, y_n, z_n) &= (0, 0, 1), \\ (z_1, \phi_1) &= (0, 0), \\ (z_2, \phi_2) &= \left(0, \frac{2\pi}{3}\right), \\ (z_3, \phi_3) &= \left(0, \frac{4\pi}{3}\right). \end{aligned}$$

Функціонал енергії-моменту в даній системі координат

$$\begin{aligned} H_{\mu_e} &= \frac{1}{4\pi} \left(\sum_{1 \leq i < j \leq 3} \ln[2(1 - z_i z_j - \sqrt{1 - z_i^2} \sqrt{1 - z_j^2} \cos(\phi_i - \phi_j))] + \right. \\ &+ \kappa \sum_{i=1}^3 \ln[2(1 - (x_n \cos \phi_i + y_n \sin \phi_i) - z_i \sqrt{1 - x_n^2 - y_n^2})] \left. \right) - \\ &- \omega \left(\kappa \sqrt{1 - x_n^2 - y_n^2} + \sum_{i=1}^3 z_i \right). \quad (4.61) \end{aligned}$$

Прирівнявши нулю одну із перших варіацій H_{μ_e} в положенні рівноваги, отримаємо

$$\omega = -\kappa.$$

Друга варіація H_{μ_e} в положенні рівноваги має вигляд

$$D^2 H_{\mu_e} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\kappa \\ \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}\kappa}{2} & \frac{\kappa}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}\kappa}{2} & \frac{\kappa}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} - \kappa & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\kappa & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} - \kappa & -\frac{2}{3} & \frac{\kappa}{2} & -\frac{\sqrt{3}\kappa}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} - \kappa & \frac{\kappa}{2} & \frac{\sqrt{3}\kappa}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}\kappa}{2} & -\frac{\sqrt{3}\kappa}{2} & -\kappa & \frac{\kappa}{2} & \frac{\kappa}{2} & -\frac{3\kappa}{2} - \kappa^2 & 0 \\ -\kappa & \frac{\kappa}{2} & \frac{\kappa}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{3}\kappa}{2} & \frac{\sqrt{3}\kappa}{2} & 0 & -\frac{3\kappa}{2} - \kappa^2 \end{pmatrix}.$$

Оскільки отримана матриця має циклічні блоки [11], вибравши базис $T_{\mathbf{x}_e} P$ у вигляді

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \frac{2\pi}{3} & \sin \frac{4\pi}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cos \frac{2\pi}{3} & \cos \frac{4\pi}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & \cos \frac{2\pi}{3} & \cos \frac{4\pi}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sin \frac{2\pi}{3} & \sin \frac{4\pi}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ x_n \\ y_n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ x_n \\ y_n \end{pmatrix},$$

матриця $D^2H_{\mu_e}$ спроститься до вигляду

$$D^2H_{\mu_e}|_{(x_1, \dots, x_8)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 - 3\kappa & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & \frac{3\kappa}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3\kappa}{2} & -\frac{3\kappa}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3\kappa}{2} & -\frac{3\kappa}{2} & -\frac{3\kappa}{2} - \kappa^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & -\frac{3\kappa}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{3\kappa}{2} & -\frac{3\kappa}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{3\kappa}{2} & -\frac{3\kappa}{2} & -\frac{3\kappa}{2} - \kappa^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Нульове власне значення відповідає нейтрально стійкому напрямку (напрямку дотичному до орбіти $SO(2)$). Оскільки матриця

$$\mathbf{D}_1 = \begin{pmatrix} -3 & 0 & \frac{3\kappa}{2} \\ 0 & -\frac{3\kappa}{2} & -\frac{3\kappa}{2} \\ \frac{3\kappa}{2} & -\frac{3\kappa}{2} & -\frac{3\kappa}{2} - \kappa^2 \end{pmatrix}$$

може бути тільки від'ємно визначеною (перший головний мінор від'ємне число), тому положення рівноваги буде стійким за умови, коли другий головний мінор \mathbf{D}_1 додатний, третій - від'ємний та $-6 - 2\kappa < 0$. Тому маємо наступну систему нерівностей, яка задає умови стійкості положення рівно-

ваги

$$\begin{cases} -6 - 2\kappa < 0, \\ \frac{9\kappa}{2} > 0, \\ -\frac{9\kappa^3}{8} < 0. \end{cases} \quad (4.62)$$

Розв'язком даної системи є інтервал $\kappa \in (0, \infty)$, який задає область нелінійної стійкості.

Матриця \mathbf{L}_{2N} лінеаризованої навколо положення рівноваги системи, має вигляд

$$\mathbf{L}_{2N} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} - \kappa & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\kappa & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} - \kappa & -\frac{2}{3} & \frac{\kappa}{2} & -\frac{\sqrt{3}\kappa}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} - \kappa & \frac{\kappa}{2} & \frac{\sqrt{3}\kappa}{2} \\ \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & \kappa \\ -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}\kappa}{2} & -\frac{\kappa}{2} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}\kappa}{2} & -\frac{\kappa}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{3}{2} - \kappa \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} + \kappa & 0 \end{pmatrix}.$$

Характеристичне рівняння даної матриці має наступний вигляд

$$\det(\mathbf{L}_{2N} - \lambda \mathbf{E}) = \lambda^2(\lambda^2 + \kappa^2)(4\lambda^4 + (9 + \kappa)\lambda^2 + \kappa^2) = 0. \quad (4.63)$$

Рівняння (4.63) буде мати корені з позитивною дійсною частиною тільки у випадку, коли рівняння

$$4\lambda^4 + (9 + \kappa)\lambda^2 + \kappa^2 = 0, \quad (4.64)$$

матиме корені з позитивною дійсною частиною. Розв'язками біквдратного рівняння (4.64) є

$$\lambda = \pm \frac{\sqrt{-9 - 4\kappa \pm 3\sqrt{9 + 8\kappa}}}{2\sqrt{2}}.$$

Оскільки $-9 - 4\kappa \pm 3\sqrt{|9 + 8\kappa|} < 0$ при $k \neq 0$, тому корені будуть мати додатною дійсну частину тільки при $9 + 8\kappa < 0$, що й доводить твердження теореми.

Зауваження 4.2. Результат про нелінійну стійкість положення рівноваги повністю узгоджується з [11].

Зауваження 4.3. Оскільки про проходженні $k = -\frac{9}{8}$ система переходить з лінійно стійкої до лінійно нестійкої, дане значення параметра є точкою біфуркації Гамільтона-Хопфа. При $\kappa = 0$ ми отримуємо конфігурацію трьох рівновіддалених вихорів в екваторіальній площині, яка була досліджена в попередньому параграфі.

4.3.3. Стійкість правильних багатогранників. Дослідимо стійкість положень рівноваги у формі правильних та напівправильних багатогранників. Для спрощення викладок, у випадку рівних інтенсивностей, не обмежуючи загальності, можна покласти $\Gamma_i = 1, i = 1, \dots, N$.

Користуючись методом енергії-моменту в циліндричних координатах доведемо наступні твердження:

4.6. *У випадку рівних інтенсивностей положення рівноваги у формі тетраедра, октаедра та ікосаедра – нелінійно стійкі.*

Оскільки дані положення відносної рівноваги є фіксованими виродженими положеннями рівноваги ($\mathbf{J} = 0$), для дослідження стійкості скористаємось початковою нерухомою системою координат в якій гамільтоніан має вигляд (4.39). Власні значення матриці приведено в таблиці 4.1. Групою симетрій, яка не змінює дані положення рівноваги, є група $SO(3)$ (довільне обертання сфери не порушує положень рівноваги). Дотичний простір до орбіти даної групи є тривимірним, що й пояснює наявність трьох нульових власних значень. Всі власні значення, які відповідають трансверсальним напрямкам, є від'ємними, тому згідно з теоремою 4.3, досліджувані положення рівноваги є стійким.

4.7. *У випадку рівних інтенсивностей положення рівноваги у формі куба, додекаедра, кубооктаедра та ікосододекаедра – нестійкі.*

Оскільки дані положення відносної рівноваги також є фіксованими ви-

Таблиця 4.1

Координати вершин та власні значення матриці других похідних для стійких конфігурацій.

Координати вершин (\mathbf{z}_0, ϕ_0)	Власні значення матриці \mathbf{H}_{2N}
Тетраедр (N=4)	
$\left((-1)^k \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{\pi k}{2} \right), k = 0, \dots, 3$	$-\frac{9}{4}, -\frac{21}{16}, -\frac{21}{16}, -\frac{9}{8}, -\frac{1}{2}, 0, 0, 0$
Октаедр (N=6)	
$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \pi \right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right)$ $-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \pi \right), \left(0, \frac{\pi}{2} \right), \left(0, \frac{3\pi}{2} \right)$	$-4, -\frac{9+\sqrt{41}}{4}, -\frac{9+\sqrt{41}}{4}, -\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{5}{4},$ $-\frac{9-\sqrt{41}}{4}, -\frac{9-\sqrt{41}}{4}, -\frac{1}{4}, 0, 0, 0$
Ікосаедр (N=12)	
$\left((-1)^k \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}, (-1)^l \frac{\pi}{2} \right),$ $\left((-1)^k \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}, (1 - (-1)^l) \frac{\pi}{2} \right),$ $\left(0, (-1)^{k+1} \arccos \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}} + \right.$ $\left. + (1 - (-1)^l) \frac{\pi}{2} \right),$	Числові наближення власних значень: $-23.8462, -22.9415, -17.8963, -12.0918,$ $-9.73771, -9.69726, -9.03378, -5.9006,$ $-5.59474, -5.0765, -4.70151, -3.51885,$ $-2.8623, -2.44798, -2.22719, -1.22744,$ $-1.19444, -0.877398, -0.680072,$ $-0.551888, -0.281533$

родженими положеннями рівноваги ($\mathbf{J} = 0$), згідно з наведеними вище міркуваннями гамільтоніан має вигляд (4.39). Координати вершин та власні значення матриці приведені у таблиці 4.2. Серед власних значень кожної конфігурації присутні такі, у яких дійсна частина додатна, тому приведені конфігурації нестійкі.

4.8. *Положення рівноваги у формі антисиметричного куба та куба з кільцями вихорів протилежної інтенсивності – нестійкі.*

В даних положеннях рівноваги не всі інтенсивності рівні між собою. Не обмежуючи загальності, покладемо $\Gamma_i = 1, \Gamma_j = -1, i = 1, \dots, 4, j =$

Таблиця 4.2

Власні значення лінеаризованої системи для нестійких конфігурацій.

Багатогранник	Власні значення матриці \mathbf{L}_{2N}
Куб ($N = 8$)	$i\sqrt{3}, i\sqrt{3}, i\sqrt{3}, -i\sqrt{3}, -i\sqrt{3}, -i\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{15}}{4}, -\frac{\sqrt{15}}{4}, -\frac{\sqrt{15}}{4}, \frac{\sqrt{15}}{4}, \frac{\sqrt{15}}{4}, 0, 0, 0, 0, 0, 0$
Антисиметричний куб ($N = 8$)	Числові наближення власних значень: -1.50425, -1.50425, 1.50425, 1.50425, 1.41833, -1.41833, 1.41833, -1.41833, 0.986012i, -0.986012i, 0.986012i, -0.986012i, 0.809152, -0.809152, 0, 0
Куб з 2 кільцями вихорів протилежної інтенсивності ($N = 8$)	Числові наближення власних значень: -2.44949, 2.44949, -1.92953, -1.92953, 1.92953, 1.92953, 1.2137 i, 1.2137i, -1.2137i, -1.2137i, 0.75i, 0.75i, -0.75i, -0.75i, 0, 0
Додекаедр ($N = 20$)	Числові наближення власних значень: 4.66871i, -4.66871i, 4.66871i, -4.66871i, 4.66871i, -4.66871i, 4.66871i, -4.66871i, 4.6614i, -4.6614i, 4.6614i, -4.6614i, 4.6614i, -4.6614i, 4.6614i, -4.6614i, 4.6614i, -4.6614i, 3.12812, -3.12812, 3.12812, -3.12812, 3.12812, -3.12812, 2.72398, -2.72398, 2.72398, -2.72398, 2.72398, -2.72398, 2.72398, -2.72398, 2.72398, -2.72398, 0, 0, 0, 0, 0, 0

5, ..8. . Дані положення відносної рівноваги не є виродженими положеннями рівноваги ($\mathbf{J} \neq 0$), тому всі вихорі будуть обертатись навколо вектора \mathbf{J} . Виберемо систему координат, у якій вектор \mathbf{J} співнапрямлений з додатнім

Таблиця 4.3

Власні значення лінеаризованої системи для нестійких конфігурацій.

Багатогранник	Власні значення матриці \mathbf{L}_{2N}
Кубооктаедр ($N = 12$)	$\frac{2i\sqrt{134}}{9}, \frac{2i\sqrt{134}}{9},$ $\frac{2i\sqrt{134}}{9}, -\frac{2i\sqrt{134}}{9}, -\frac{2i\sqrt{134}}{9},$ $-\frac{2i\sqrt{134}}{9}, -\frac{\sqrt{37}}{3}, \frac{\sqrt{37}}{3}, \frac{i\sqrt{35}}{3},$ $\frac{i\sqrt{35}}{3}, -\frac{i\sqrt{35}}{3}, -\frac{i\sqrt{35}}{3}, \frac{2i\sqrt{2}}{3},$ $\frac{2i\sqrt{2}}{3}, \frac{2i\sqrt{2}}{3}, -\frac{2i\sqrt{2}}{3}, -\frac{2i\sqrt{2}}{3},$ $-\frac{2i\sqrt{2}}{3}, 0, 0, 0, 0, 0, 0$
Ікосідодекаедр ($N = 30$)	<p>Числові наближення власних значень:</p> $7.15642i, -7.15642i, 7.15642i, -7.15642i,$ $7.15642i, -7.15642i, 6.80416, -6.80416,$ $6.80416, -6.80416, 6.80416, -6.80416, 6.57547i,$ $-6.57547i, 6.57547i, -6.57547i, 6.57547i, -6.57547i,$ $6.57547i, -6.57547i, 6.57547i, -6.57547i, 5.98329,$ $-5.98329, 5.98329, -5.98329, 5.98329, -5.98329,$ $5.98329, -5.98329, 5.87649i, -5.87649i, 5.87649i,$ $-5.87649i, 5.87649i, -5.87649i, 2.76964i, -2.76964i,$ $2.76964i, -2.76964i, 2.76964i, -2.76964i, 2.76964i,$ $-2.76964i, 2.38582i, -2.38582i, 2.38582i, -2.38582i,$ $2.38582i, -2.38582i, 2.38582i, -2.38582i, 2.38582i,$ $-2.38582i, 0, 0, 0, 0, 0, 0$

напрямок осі Oz .

Як було зазначено вище, для дослідження стійкості системи, потрібно перейти до системи координат, яка обертається разом з вихорами. Гамільтоніан у даній рухомій системі координат має вигляд (4.40). Оскільки положення рівноваги є критичними точками H_{μ_e} , значення кутової швидкості

ω для кожної з конфігурацій можна знайти як розв'язок рівняння

$$\frac{\partial H_{\mu_e}}{\partial z_1} \Big|_{(z_0, \phi_0)} = 0. \quad (4.65)$$

Для антисиметричного куба отримаємо

$$\omega = \frac{41\sqrt{3}}{112\pi}. \quad (4.66)$$

Для куба з кільцями вихорів протилежної інтенсивності

$$\omega = \frac{3\sqrt{2}}{8\pi}. \quad (4.67)$$

Оскільки H_{μ_e} лінійно залежить від координат, маємо наступну рівність

$$D^2 H_{\mu_e} = D^2 H, \quad (4.68)$$

тобто друга варіація гамільтоніана не зміниться при переході до рухомої системи координат. Власні значення матриці \mathbf{L}_{2N} приведені у таблицях 4.2 та 4.3. Серед власних значень даних конфігурацій присутні такі, у яких дійсна частина додатна, тому досліджувані конфігурації нестійкі.

Зауваження 4.4. Наведені вище результати, щодо стійкості положень рівноваги у формі тетраедра, октаедра, ікосаедра, та нестійкості куба та додекаедра повністю узгоджуються з результатами роботи [28]. Нестійкість положень рівноваги у формі антисиметричного куба та куба є частинними випадками аналізу стійкості кільцевих пар розглянутих у роботі [31].

Висновки до розділу 4

В даному розділі:

1. Приведено методи дослідження стійкості гамільтонових систем з симетріями та розвинено координатні методи дослідження стійкості симетричних положень відносної рівноваги.

2. Для системи з N точкових вихорів побудовано функціонал енергії та моменту у векторній та координатних формах.
3. Користуючись векторним формалізмом проведено аналіз стійкості положень відносної рівноваги трьох точкових вихорів.
4. На основі аналізу доданків третього та четвертого порядку проведено дослідження стійкості положення рівноваги у формі правильного трикутника, який лежить у екваторіальній площині.
5. Користуючись векторним формалізмом отримано області значень інтенсивностей вихорів в яких положення відносної рівноваги у формі тетраедра буде стійким.
6. Наведено області лінійної та нелінійної стійкості для положення рівноваги у формі трикутної піраміди з правильним трикутником в основі і прямим кутом при вершині.
7. Користуючись координатними методами отримано наступні результати, щодо стійкості положень відносної рівноваги у формі правильних та напівправильних багатогранників з рівними інтенсивностями:
 - Тетраедр - стійке положення рівноваги
 - Октаедр - стійке положення рівноваги
 - Куб - нестійке положення рівноваги
 - Антисиметричний куб - нестійке положення рівноваги
 - Ікосаедр - стійке положення рівноваги
 - Додекаедр - нестійке положення рівноваги
 - Кубооктаедр - нестійке положення рівноваги
 - Ікосідодекаедр - нестійке положення рівноваги

Новими результатами даного розділу є:

1. Опис областей стійкості у випадку, коли три точкових вихора лежать у вершинах правильного трикутника в екваторіальній площині.
2. Опис областей стійкості у випадку, коли чотири точкових вихора лежать у вершинах тетраедра.

3. Повний аналіз стійкості положення рівноваги у формі прямокутної трикутної піраміди з правильним трикутником в основі.
4. Стійкість положень рівноваги у формі напівправильних багатогранників: кубооктаедра та ікосододекаедра.

ВИСНОВКИ

З наведеного у розділі 1 огляду можна зробити висновок, що задача дослідження стійкості є досить актуальною і на час написання дисертаційної роботи до кінця не вивченою. Все ще залишається відкритим питання класифікації можливих положень рівноваги. Симетричні конфігурації є найбільш вивченими. При дослідженні таких систем використовуються методи сучасної диференціальної геометрії, а більш точніше методи геометричної механіки. Використання даних методів дозволяє отримувати результати щодо стійкості відносних положень рівноваги без необхідності переходу до рухомих систем координат.

Продемонстрований у розділі 2 метод виведення рівнянь руху точкових вихорів на сфері може бути узагальнений на випадок більш складної двовимірної поверхні, Зокрема, можна отримати рівняння руху точкових вихорів на поверхні еліпса, який більш точно відображає геометрію нашої планети. Але оскільки модель точкових вихорів разом з припущеннями двовимірної течії дають немалу похибку при описі геоатмосферних явищ, тому перехід від сфери до еліпса якісно не змінить результатів. Щодо рівнянь руху точкових вихорів, важливо також відмітити, що хоча на перший погляд вони представляють собою чисто кінематичні умови руху точки, в якій знаходиться вихор, проте як можна бачити з процедури виведення, ці рівняння виражають динамічні закони руху. Дані закони отримуються з рівнянь Ейлера, котрі описують динамічну поведінку ідеальної нестисливої рідини.

У розділ 3 знайдено і класифіковано положення фіксованої та відносної рівноваги для трьох та чотирьох точкових вихорів. Оскільки у випад-

ку трьох вихорів опис їх руху є інтегрованою задачею, тому опис положень рівноваги є значним кроком в описі динаміки руху системи. Для чотирьох вихорів, задача інтегровна тільки у випадку, коли вектор моменту завихреності рівний 0, що говорить про можливість існування хаотичних режимів.

Приведений у третьому розділі критерій рівноважності конфігурації дозволяє розробити чисельні методи для пошуку положень рівноваги точкових вихорів на сфері.

Проведений у четвертому розділі аналіз стійкості конфігурацій трьох та чотирьох вихорів показує, що при невеликій кількості вихорів існують непусті області стійкості та нестійкості. Подальший аналіз стійкості симетричних конфігурацій показує, що хоча навіть за наявності додаткової симетрії в системі, з ростом числа вихорів кількість стійких конфігурацій зменшується.

Використані у четвертому розділі методи, можуть бути узагальнені на випадок довільної гамільтонової системи з компактною групою симетрій.

Додаток А

Достатні умови виродженого строгого екстремуму

Лема А.1 (Необхідна умова виродженого строгого екстремуму). Нехай $f \in C^p(\mathbb{R}^n)$, $p \geq 4$ та $\mathbf{x}_e \in \mathbb{R}^n$ - є критичною точкою даної функції ($Df|_{\mathbf{x}_e} = 0$). Нехай далі $\mathbf{e}_i \in \mathbb{R}^n$ - базис простору \mathbb{R}^n та f такі, що

$$\begin{aligned} \delta f(\delta \mathbf{x}) &= f(\mathbf{x}_e + \delta \mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_e) = \\ &= f(\mathbf{x}_e + \delta x_1 \mathbf{e}_1 + \dots + \delta x_n \mathbf{e}_n) - f(\mathbf{x}_e) = \\ &= \sum_{i=1}^m a_{ii} \delta^2 x_i + \sum_{i,j,k=1}^n a_{ijk} \delta x_i \delta x_j \delta x_k + \\ &+ \sum_{i,j,k,l=1}^n a_{ijkl} \delta x_i \delta x_j \delta x_k \delta x_l + o(\|\delta \mathbf{x}\|^2), \end{aligned} \tag{A.1}$$

де $m < n$ та $a_{ii} = \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}_e)}{\partial x_i^2}$, $a_{ijk} = \frac{\partial^3 f(\mathbf{x}_e)}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}$, $a_{ijkl} = \frac{\partial^4 f(\mathbf{x}_e)}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k \partial x_l}$. Якщо квадратична форма

$$\begin{aligned} F &= \sum_{i=1}^m a_{ii} y_i^2 + \sum_{i \in S_c} \sum_{j,k=m+1}^n \left(\sum_{I \in S(i,j,k)} a_I \right) y_i y_{jk} + \\ &+ \sum_{i,j,k,l=m+1}^n \left(\sum_{I \in S(i,j,k,l)} a_I \right) y_{ij} y_{kl}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_c &= \{s_i\}_{i=1, \dots, |S_c|} = \\ &= \{1, \dots, m\} \cup \{i > m \mid \sum_{I \in S(i,j,k)} a_I \neq 0, \forall k, l : m < j \leq n, m < k \leq n\}, \end{aligned}$$

($S(i, j, k)$ та $S(i, j, k, l)$ - множини перестановок індексів i, j, k та i, j, k, l , відповідно) є не виродженою та знаковизначеною, то точка \mathbf{x}_e є точкою строгого локального екстремуму.

Доведення. Не обмежуючи загальності допустимо, що квадратична форма F є додатно визначеною, тобто власні значення відповідної матриці є строго додатними дійсними числами та існує невироджена заміна змінних

$$\mathbf{z} = \mathbf{C}\mathbf{y},$$

де $\mathbf{y} = (y_{s_1}, \dots, y_{s_{|S_c|}}, y_{(m+1)(m+1)}, y_{(m+1)(m+2)}, \dots, y_{nn}) \in \mathbb{R}^N$, $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^N$, що приводить форму (A.2) до вигляду

$$F = \sum_{i=1}^N z_i^2.$$

Тоді використавши спочатку заміну $\delta x_i = y_i$, $\delta x_i \delta x_j = y_{ij}$, а потім $\mathbf{y} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{z}$ отримаємо, що розклад (A.1) можна записати у змінних z_i у формі

$$\delta f(\delta \mathbf{x}) = \delta \hat{f}(\mathbf{z}) = \sum_{i=1}^N z_i^2 + o(\|\mathbf{z}\|^2).$$

Оскільки довільному напрямку $\delta \mathbf{x}_0 \neq \mathbf{0}$ відповідає ненульовий вектор \mathbf{z}_0 з означення $o(\cdot)$ маємо, що існує $\tau_0 = \tau_0(\delta \mathbf{x}_0)$, $0 < \tau_0 < 1$, таке, що $\delta \hat{f}(\theta \mathbf{z}_0) > 0$, $\forall 0 < \theta < \tau_0$. Тоді $\tau_0 \delta \mathbf{x}_0 \neq \mathbf{0}$ буде відповідати $\mathbf{z}_1 \neq \mathbf{0}$ такий, що $\|\mathbf{z}_1\| < \|\tau_0 \mathbf{z}_0\|$. Тому $\delta f(\tau_0 \mathbf{x}_0) = \delta \hat{f}(\mathbf{z}_1) > 0$.

Оскільки сфера в \mathbb{R}^n є компактною множиною та $\tau(\delta \mathbf{x}) > 0$, $\forall \delta \mathbf{x}$, маємо

$$\tau_{min} = \inf_{\delta \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \tau(\delta \mathbf{x}) = \inf_{\|\delta \mathbf{x}\|=1} \tau(\delta \mathbf{x}) > 0.$$

Тобто існує окіл $U = \{\|\delta \mathbf{x}\| = \tau_{min}\}$ початку координат такий, що $\delta f(\delta \mathbf{x}) > 0$, $\forall \delta \mathbf{x} \in U$. □

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. *Abo-Shaer, J. R.* Observation of vortex lattices in bose–einstein condensates / J. R. Abo-Shaer, W. Ketterle, J. M. Vogels // *Science*. — 2001. — Vol. 292. — Pp. 476–479.
2. *Abraham, R.* Foundations of mechanics, sec. ed / R. Abraham, J. Marsden. — New York: Addison-Wesley, 1978.
3. *Abrikosov, A. A.* On the magnetic properties of superconductors / A. A. Abrikosov // *Sov. Phys. JETP*. — 1957. — Vol. 5. — Pp. 1174–1178.
4. *Adhikari, S. K.* Effect of an impulsive force on vortices in a rotating bose–einstein condensate / S. K. Adhikari, P. Muruganandam // *Phys. Lett. A*. — 2002. — Vol. 301. — Pp. 333–339.
5. *Aref, H.* Motion of three vortices / H. Aref // *Phys. Fluids*. — 1979. — Vol. 22, no. 3. — Pp. 393–400.
6. *Aref, H.* Point vortex motions with a center of symmetry / H. Aref // *Physics of Fluids*. — 1982. — Vol. 25. — Pp. 2183–2187.
7. *Arnold, V. I.* Sur la geometrie differentielle des groupes de Lie de dimension infinie et ses applications a l'hydrodynamique des fluides parfaits / V. I. Arnold // *Ann. Inst. Fourier*. — 1966. — Vol. 16, no. 1. — Pp. 319–361.
8. *Boatto, S.* Nonlinear stability of a latitudinal ring of point-vortices on a nonrotating sphere / S. Boatto, H. E. Cabral // *SIAM Journal on Applied Mathematics*. — 2003. — Vol. 64. — Pp. 216–230.
9. *Borisov, A. V.* Dynamics of three vortices on a plane and a sphere. ii. general compact case / A. V. Borisov, V. G. Lebedev // *Regular Chaotic Dyn.* — 1998. — Vol. 3, no. 2. — Pp. 99–114.
10. *Borisov, A. V.* Dynamics of three vortices on a plane and a sphere. iii.

- general compact case / A. V. Borisov, V. G. Lebedev // *Regular Chaotic Dyn.* — 1998. — Vol. 3, no. 4. — Pp. 76–90.
11. *Cabral, H. E.* Stability and bifurcations for the $N+1$ vortex problem on the sphere / H. E. Cabral, K. R. Meyer, D. S. Schmidt // *Regular and Chaotic Dynamics.* — 2003. — Vol. 8, no. 3. — Pp. 259–282.
 12. *Chandrasekhar, S.* Ellipsoidal figures of equilibrium / S. Chandrasekhar. — New Haven and London: Yale University Press, 1969. — Vol. IX. — 252 pp.
 13. *Dibattista, M. T.* Barotropic vortex pairs on a rotating sphere / M. T. Dibattista, L. M. Polvani // *Journal of Fluid Mechanics.* — 1998. — Vol. 358. — Pp. 107–133.
 14. *Dirichlet, G. L.* Untersuchungen über ein Problem der Hydrodynamik / G. L. Dirichlet, R. Dedekind. — Dieterich, 1860.
 15. *Durkin, D.* Experiments on two-dimensional vortex patterns / D. Durkin, J. Fajans // *Physics of Fluids.* — 2000. — Vol. 12, no. 2. — Pp. 289–293.
 16. *Essmann, U.* The direct observation of individual flux lines in type II superconductors / U. Essmann, H. Träuble // *Physics Letters A.* — 1967. — Vol. 24, no. 10. — Pp. 524–530.
 17. *Gröbli, W.* Spezielle probleme über die bewegung geradliniger paralleler wirbelfäden zürcher und furrer, zürich / W. Gröbli // *Also published in Vierteljschr. Naturf. Ges. Zürich.* — 1877. — Vol. 22. — Pp. 37–81.
 18. *Hally, D.* Stability of streets of vortices on surfaces of revolution with a reflection symmetry / D. Hally // *Journal of Mathematical Physics.* — 1980. — Vol. 21, no. 1. — Pp. 211–217.
 19. *Havelock, T. H.* The stability of motion of rectilinear vortices in ring formation / T. H. Havelock // *Philos. Mag., VII. Ser.* — 1931. — Vol. 11. — Pp. 617–633.
 20. *Helmholtz, H.* Über integrale hydrodinamischen gleichungen welche den wirbelbewegungen entsprechen / H. Helmholtz // *J. Reine Angew. Math.* — 1858. — Vol. 55. — Pp. 25–55.

21. *Jamaloodeen, M. I.* The N-vortex problem on a rotating sphere. II. Heterogeneous Platonic solid equilibria / M. I. Jamaloodeen, P. K. Newton // *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Science.* — 2006. — Vol. 462, no. 2075. — P. 3277.
22. *Kidambi, R.* Motion of three point vortices on a sphere / R. Kidambi, P. K. Newton // *Physica D.* — 1998. — Vol. 116. — Pp. 143–175.
23. *Kidambi, R.* Collision of three vortices on a sphere / R. Kidambi, P. K. Newton // *Il Nuovo Cimento.* — 1999. — Vol. 22, no. C(6). — Pp. 779–791.
24. *Kidambi, R.* Streamline topologies for integrable vortex motion on a sphere / R. Kidambi, P. K. Newton // *Physica D: Nonlinear Phenomena.* — 2000. — Vol. 140, no. 1-2. — Pp. 95–125.
25. *Kimura, Y.* Vortex motion on surfaces with constant curvature / Y. Kimura // *Proc. R. Soc. London.* — 1999. — Vol. A 455. — Pp. 245–259.
26. *Kimura, Y.* Vortex motion on a sphere / Y. Kimura, H. Okamoto // *J. Phys. Soc. Japan.* — 1987. — Vol. 56(12). — Pp. 4203–4206.
27. *Kurakin, L. G.* On nonlinear stability of the regular vortex systems on a sphere / L. G. Kurakin // *Chaos.* — 2004. — Vol. 14, no. 3. — Pp. 592–602.
28. *Kurakin, L. G.* On Stability of a Regular Vortex Polygon in the Circular Domain / L. G. Kurakin // *Journal of Mathematical Fluid Mechanics.* — 2005. — Vol. 7. — Pp. 376–386.
29. *Kurakin, L. G.* The stability of stationary rotation of a regular vortex polygon / L. G. Kurakin, V. I. Yudovich // *Chaos.* — 2002. — Vol. 12, no. 3. — Pp. 574–595.
30. *Laurent-Polz, F.* Point vortices on the sphere: a case with opposite vorticities / F. Laurent-Polz // *Nonlinearity.* — 2002. — Vol. 15, no. 1. — Pp. 143–172.
31. *Laurent-Polz, F.* Point vortices on a rotating sphere / F. Laurent-Polz // *Regular and Chaotic Dynamics.* — 2005. — Vol. 10, no. 1. — Pp. 39–58.

32. *Lewis, D.* Rotating n-gon/kn-gon vortex configurations / D. Lewis, T. Ratiu // *Journal of Nonlinear Science*. — 1996. — Vol. 6, no. 5. — Pp. 385–414.
33. *Lim, C.* Relative equilibria of point vortices on the sphere / C. Lim, J. Montaldi, M. Roberts // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. — 2001. — Vol. 148, no. 1-2. — Pp. 97–135.
34. *Marsden, J.* Reduction of symplectic manifolds with symmetry / J. Marsden, A. Weinstein // *Rep. Math. Phys.* — 1974. — Vol. 5. — Pp. 121–130.
35. *Meleshko, V. V.* A bibliography of vortex dynamics 1858–1956 / V. V. Meleshko, H. Aref // *Adv. in applied mech.* — 2007. — Vol. 41. — Pp. 197–292.
36. *Newton, P. K.* The N-Vortex problem. Analytical Techniques / P. K. Newton. — New York: Springer, 2001. — 432 pp.
37. *Newton, P. K.* Construction of point vortex equilibria via Brownian ratchets / P. K. Newton, G. Chamoun // *Proceedings of the Royal Society A*. — 2007. — Vol. 463, no. 2082. — Pp. 1525–1540.
38. *Ortega, J. P.* Stability of Hamiltonian relative equilibria / J. P. Ortega, T. S. Ratiu // *Nonlinearity*. — 1999. — Vol. 12, no. 3. — Pp. 693–720.
39. *Patrick, G.* Relative equilibria in Hamiltonian systems: The dynamic interpretation of nonlinear stability on a reduced phase space / G. Patrick // *Journal of Geometry and Physics*. — 1992. — Vol. 9, no. 2. — Pp. 111–119.
40. *Pekarsky, S.* Point vortices on a sphere: Stability of relative equilibria / S. Pekarsky, J. E. Marsden // *Journal of Mathematical Physics*. — 1998. — Vol. 39, no. 11. — Pp. 5894–5907.
41. *Routh, E. J.* A treatise on the stability of a given state of motion: particularly steady motion / E. J. Routh. — London: Macmillan and co., 1877.
42. *Simo, J. C.* Stability of relative equilibria. Part I: The reduced energy-momentum method / J. C. Simo, D. Lewis, J. E. Marsden // *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. — 1991. — Vol. 115, no. 1. — Pp. 15–59.

43. *Synge, J. L.* On the motion of three vortices / J. L. Synge // *Can. J. Math.* — 1949. — Vol. 1. — Pp. 257–270.
44. *Thomson, J. J.* On the motion of vortex rings / J. J. Thomson // *Adams Prize Essay (Macmillan, London, 1883)*. — 1883. — P. 95.
45. *Thomson, W.* Floating Magnets / W. Thomson // *Nature*. — 1878. — Vol. 18. — Pp. 13–14.
46. *Tsubota, M.* Vortex lattice formation in a rotating bose–einstein vortex lattice formation in a rotating bose–einstein condensate / M. Tsubota, K. Kasamatsu, M. Ueda // *Phys. Rev. E*. — 2002. — Jan. — Vol. 65, no. 2. — P. 023603.
47. *Yarmchuk, E. J.* Observation of stationary vortex arrays in rotating superfluid helium / E. J. Yarmchuk, M. J. V. Gordon, R. E. Packard // *Physical Review Letters*. — 1979. — Vol. 43, no. 3. — Pp. 214–217.
48. *Zabusky, N. J.* A modulated point-vortex model for geostrophic, β -plane dynamics / N. J. Zabusky, J. C. McWilliams // *Physics of Fluids*. — 1982. — Vol. 25. — Pp. 2175–2182.
49. *Zermelo, E.* Hydrodynamische untersuchungen über die wirbelbewegung in einer kugeläche / E. Zermelo // *Z. Math. Phys.* — 1902. — Vol. 47. — Pp. 201–237.
50. *Алексеевко, С. В.* Введение в теорию концентрированных вихрей / С. В. Алексеевко, П. А. Куйбин, В. Л. Окулов. — Новосибирск: Инст. теплофизики СО РАН, 2003. — 504 с.
51. *Арнольд, В. И.* Об одной априорной оценке теории гидродинамической устойчивости / В. И. Арнольд // *Изв. вузов, сер. математика*. — 1966. — № 5. — С. 3–5.
52. *Арнольд, В. И.* Математические методы классической механики / В. И. Арнольд. — 2 изд. — М.: Наука, 1979. — 472 с.
53. *Богомолов, В. А.* Динамика завихренности на сфере / В. А. Богомолов // *Изв. АН СССР, Механика жидкости и газа*. — 1977. — Т. 6. —

- С. 57–65.
54. *Богомолов, В. А.* Модель колебаний центров действия атмосферы / В. А. Богомолов // *Физика атмосферы и океана*. — 1979. — Т. 15, № 3. — С. 243–249.
 55. *Богомолов, В. А.* О двумерной гидродинамике на сфере / В. А. Богомолов // *Физика атмосферы и океана*. — 1979. — Т. 15, № 1. — С. 29–35.
 56. *Борисов, А. В.* Диссертация Э. Цермело о вихревой гидродинамике на сфере / А. В. Борисов, Л. А. Газизуллина, С. М. Рамоданов // *Нелинейная динамика*. — 2008. — Т. 4, № 4. — С. 497–513.
 57. *Борисов, А. В.* Редукция и хаотическое поведение точечных вихрей на плоскости и сфере / А. В. Борисов, А. А. Килин, И. С. Мамаев // *Нелинейная динамика*. — 2005. — Т. 1, № 2. — С. 233–246.
 58. *Борисов, А. В.* Новая интегрируемая задача о движении точечных вихрей на сфере / А. В. Борисов, А. А. Килин, И. С. Мамаев // *Нелинейная динамика*. — 2007. — Т. 3, № 2.
 59. *Борисов, А. В.* Математические методы динамики вихревых структур / А. В. Борисов, И. С. Мамаев. — М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005. — 368 с.
 60. *Бэтчелор, Д.* Введение в динамику жидкости / Д. Бэтчелор. — М.: Мир, 1973.
 61. *Вилля, А.* Теория вихрей / А. Вилля. — М.-Л.: ОНТИ, 1936. — 266 с.
 62. *Голубева, О. В.* К вопросу о движении цепочек вихрей и вихреисточников на поверхности сферы / О. В. Голубева // *Доклады Академии Наук*. — 1949. — Т. 65, № 5. — С. 653–656.
 63. *Громека, И. С.* О вихревых движениях жидкости на сфере. Сборник протоколов заседания секции физ.-мат. общества естествоиспытателей при Казанском университете. Заседание 45, 13 апреля 1885. См. кн. Громека И. С. Собр. соч / И. С. Громека. — М.: АН СССР, 1952. — 295 с.

64. *Кирхгоф, Г.* Механика. Лекции по математической физике / Г. Кирхгоф. — М.: АН СССР, 1962. — 403 с.
65. *Козлов, В. В.* Общая теория вихрей / В. В. Козлов. — Ижевск: Изд. Удмур. универ., 1998. — 238 с.
66. *Кочин, Н. Е.* Векторное исчисление и начала тензорного исчисления / Н. Е. Кочин. — М.: Изд. АН СССР, 1961.
67. *Куракин, Л. Г.* О нелинейной устойчивости правильных вихревых многоугольников и многогранников на сфере / Л. Г. Куракин // *Доклады Академии Наук.* — 2003. — Т. 388, № 4. — С. 482–487.
68. *Ламб, Г.* Гидродинамика / Г. Ламб. — М.: Гостехиздат, 1947.
69. *Лойцанский, Л. Г.* Механика жидкости и газа / Л. Г. Лойцанский. — М.: Наука, 1970.
70. *Ляпунов, А. М.* Общая задача об устойчивости движения / А. М. Ляпунов. — М.: Гостехиздат, 1950. — 473 с.
71. *Мелешко, В. В.* Динамика вихревых структур / В. В. Мелешко, М. Ю. Константинов. — Киев: Наук. думка, 1993. — 283 с.
72. *Мелешко, В. В.* Динаміка точкових вихорів на сфері / В. В. Мелешко, П. К. Ньютон, В. В. Островський // *Прикладна гідромеханіка.* — 2009. — Т. 11, № 3. — С. 57–63.
73. *Мелешко, В. В.* Стійкість конфігурацій точкових вихорів на сфері / В. В. Мелешко, П. К. Ньютон, В. В. Островський // *Математичні методи та фізико-механічні поля.* — 2009. — Т. 52, № 3. — С. 87–103.
74. *Мелешко, В. В.* Динаміка точкових вихорів на сфері / В. В. Мелешко, В. В. Островський // *Вісник КУ.* — 2007. — Т. 3. — С. 23–28.
75. *Милн-Томпсон, Л. М.* Теоретическая гидродинамика / Л. М. Милн-Томпсон. — М.: Мир, 1964.
76. *Новиков, Е. А.* Динамика и статистика системы вихрей / Е. А. Новиков // *ЖЭТФ.* — 1975. — Т. 68, № 5. — С. 1868–1882.

77. *Пуанкаре, А.* Теория вихрей / А. Пуанкаре. — Ижевск: Изд. РХД, 2001. — 160 с.
78. *Седов, Л. И.* Механика сплошной среды / Л. И. Седов. — М.: Наука, 1970. — Т. 1-2.
79. *Сэффмэн, Ф. Д.* Динамика вихрей / Ф. Д. Сэффмэн. — М.: Научный мир, 2000. — 376 с.
80. *Цермело, Е.* Гидродинамические исследования вихревых движений
Гидродинамические исследования вихревых движений на поверхности
сферы / Е. Цермело // *Нелинейная динамика.* — 2007. — Т. 3, № 1. —
С. 81–109.
81. *Четаев, Н. Г.* Устойчивость движения / Н. Г. Четаев. — Л.: Гостехиз-
дат, 1946. — 176 с.